

## Opakování

### Opakování ze SŠ

- Nalezněte reálnou a imaginární část
  - $\frac{2}{1-3i}$
  - $(1 + i\sqrt{3})^3$
- Nalezněte velikosti a argumenty následujících komplexních čísel
  - $-2 - 2i$
  - $1 + i^{123}$
- Dokažte
  - $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$
  - $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$
  - $\overline{\bar{z}} = z$
  - $|\bar{z}| = |z|$
  - $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
  - $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi} \quad z_1, z_2 \neq 0$
  - $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi} \quad z_1, z_2 \neq 0$
- Řešte v  $\mathbb{C}$ :
  - $x^6 + 1 = 0$
  - $x^2 + x + 1 = 0$
- Řešte v  $\mathbb{R}$ :
  - $|x + 1| + |x - 1| \geq 2$
  - $|x - 3| + |x + 2| \leq 0$

### Výroky, množiny, zobrazení

- Dokažte, že platí
  - $A \Rightarrow A$
  - $(A \Rightarrow B \text{ a } B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
  - $A \Leftrightarrow A$
  - $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$
  - $(A \Leftrightarrow B \text{ a } B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
  - $\operatorname{non}(\operatorname{non} A) \Leftrightarrow A$
  - $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\operatorname{non} B \Rightarrow \operatorname{non} A)$
  - $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\operatorname{non} B \Leftrightarrow \operatorname{non} A)$
  - $(\operatorname{non}(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\operatorname{non} A) \wedge (\operatorname{non} B))$
  - $(\operatorname{non}(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\operatorname{non} A) \vee (\operatorname{non} B))$

- k)  $(\text{non}(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \wedge (\text{non } B))$   
 l)  $(\text{non}(A \Leftrightarrow B)) \Leftrightarrow ((A \wedge (\text{non } B)) \vee (B \wedge (\text{non } A)))$

7. Zapište negaci výroku

$$\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

a rozhodněte, který z výroků je pravdivý.

8. Platí následující výroky?

- a)  $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in (a, a + \varepsilon) : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$   
 b)  $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists x \in (a, a + \varepsilon) : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

9. Dokažte:

- a)  $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$   
 b)  $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$   
 c) Nechť  $A_i, i = 1, 2, \dots$  je systém libovolných množin a nechť  $B_n = \cup_{i=1}^n A_i$ . Potom  $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ .

10. Dokažte, že je-li  $f$  zobrazení, pak

$$f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2).$$

( $M_1, M_2$  jsou podmnožiny definičního oboru  $f$ .) Kdy platí rovnost?

11. Nechť  $\varphi : [0, \infty) \mapsto [1, \infty)$  je bijekce a nechť  $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x)^2 - 1}$ . Dokažte, že existuje inverzní funkce  $\psi^{-1}$  a vyjádřete ji pomocí  $\varphi^{-1}$ . Určete  $D_{\psi^{-1}}$ .