Ⓐ Řešte rovnici $y' = \frac{2xy^2}{1-x^2}$

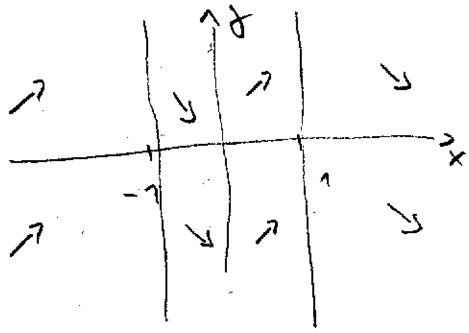
1) $F(x,y) := \frac{2xy^2}{1-x^2}$, $\mathcal{D}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = \pm 1\}$

F je spoj. na $\mathcal{D}(F) \Rightarrow$ lok. ex.

$\frac{\partial F}{\partial y}$ je loc. omezená na $\mathcal{D}(F) \Rightarrow$ jednoznačnost

$y = 0$ je triv. řešení na $(-\infty,-1)$ a $(-1,1)$ a $(1,+\infty)$

kvalitativní chování řešení:



Hledáme nenulová řešení $y \neq 0$.
Separace proměnných: $\frac{y'}{y^2} = -\frac{-2x}{1-x^2} = (-\lg|1-x^2| + C)' = \left(\lg \frac{K}{|1-x^2|}\right)'$ pro jisté $K>0$

$\frac{y'}{y^2} = (-y^{-1})'$, $\left(\lg \frac{K}{|1-x^2|}\right)' = (-\lg L|1-x^2|)'$ pro jisté $L>0$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\lg(L|1-x^2|)} \qquad (*)$$

Kde je řešení? Musí platit, že $L \cdot |1-x^2| \neq 1$

1) $|x| \in (1,+\infty)$ $\quad L \cdot (x^2-1) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1+L}{L} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1+L}{L}}$

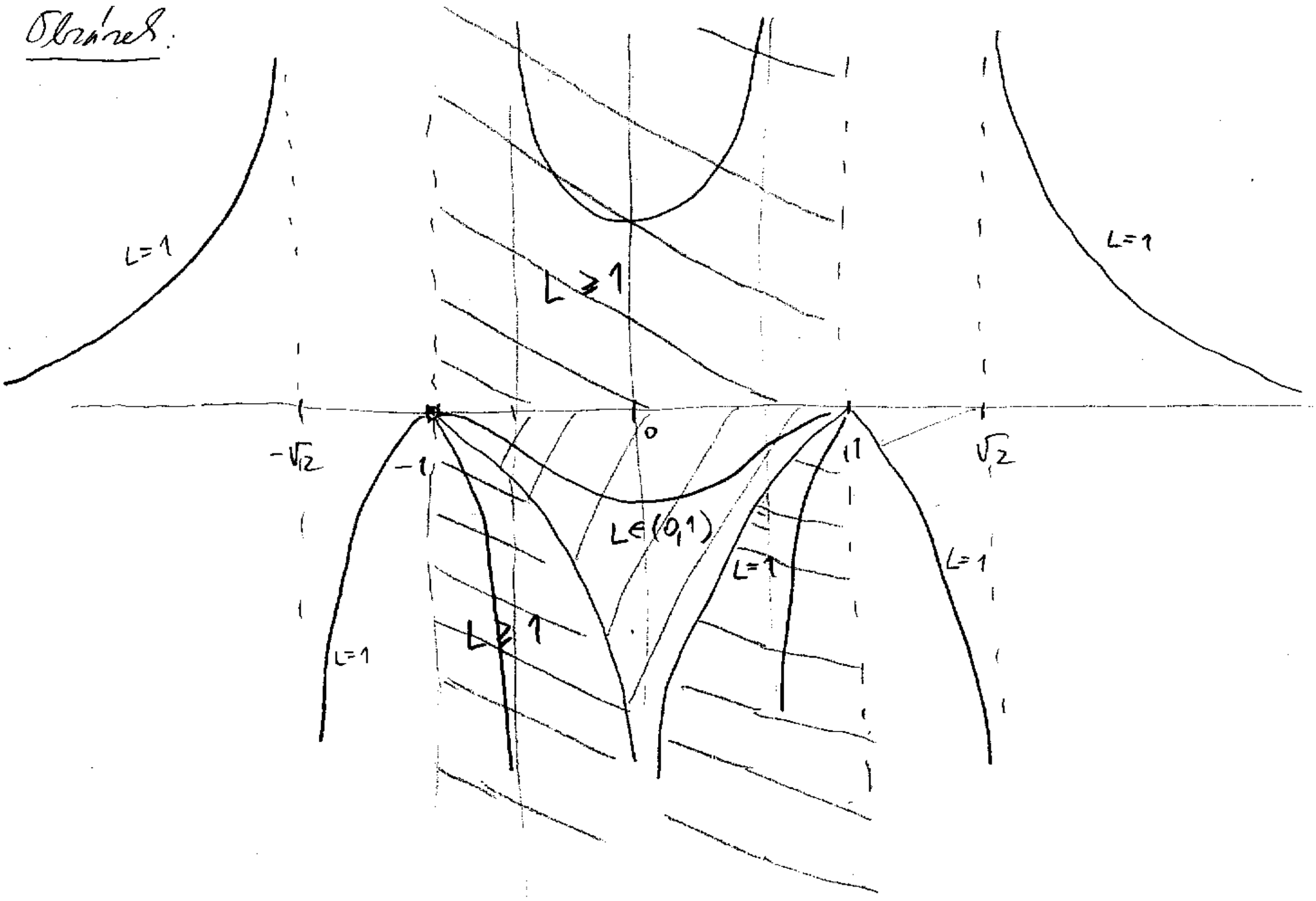
$\Rightarrow (*)$ definuje řešení na $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1+L}{L}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1+L}{L}}, -1\right)$, $\left(1, \sqrt{\frac{1+L}{L}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1+L}{L}}, +\infty\right)$,

2) $|x| \in [0,1)$ $\quad L(1-x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{L-1}{L}$

a) pro $L \in (0,1)$ žádné x neex. $\Rightarrow (*)$ def. řešení na $(-1,1)$ je-li $L \in (0,1)$

b) $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{L-1}{L}}$ pro $L \geq 1 \Rightarrow (*)$ def. řešení na $\left(-1, -\sqrt{\frac{L-1}{L}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{L-1}{L}}, \sqrt{\frac{L-1}{L}}\right)$ a $\left(\sqrt{\frac{L-1}{L}}, 1\right)$.

Obrázek:



(B) Nalezněte f.s.: $y^{(3)} + y'' + 4y' + 4y = 0$

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda+1) + 4(\lambda+1) = (\lambda^2+4)(\lambda+1) \Rightarrow \text{kořeny } -1, \pm 2i$$

$\Rightarrow$ f.s.: e^{-x}; $\sin 2x$, $\cos 2x$

Najděte kandidáty na řešení s pravou stranou f:

$f(x) = x^2 \sin 2x \quad \Rightarrow \quad y_s(x) = x\left[(Ax^2+Bx+C)\sin 2x + (Dx^2+Ex+F)\cos 2x\right]$

$f(x) = 5xe^x + 3 \quad \Rightarrow \quad y_s(x) = (Ax+B)e^x + C$

c) Řeš.: $2y'' + 2y = \frac{1}{\sin^2 x}$

1) f.s.: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ kořeny $\pm i \Rightarrow$ f.s.: $\sin x, \cos x$

2) Variace konstant: řešení hledáme ve tvaru

$y_s(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$, kde

A, B splňují: $A'\cos x + B'\sin x = 0 \quad / \cdot \cos x \quad / \cdot \sin x$

$A'(-\sin x) + B'\cos x = \frac{1}{2\sin^2 x} \quad / \cdot (-\sin x) \quad / \cdot (+\cos x)$

$\Rightarrow A'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{2} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}$

$B'(x) = \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\sin x} + c\right)' \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Položíme $A(x) = \int -\frac{1}{2} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} \, dx = \left| \begin{array}{l} \text{1 subst. věta} \\ \varphi(x) = \cos x \end{array} \right| = (*)$

$+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t^2} \, dt = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right)(-1) \, dt =$

$-\frac{1}{4} \lg \left| \frac{t-1}{t+1} \right|$ na intervalech neobsahujících ± 1

$\Rightarrow (*) = -\frac{1}{4} \lg \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} + A$ na $(0, \pi) + k\pi$

Tedy obecné řešení je:

$y(x) = -\frac{1}{2} + B \sin x + \left(A - \frac{1}{4} \lg \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right) \cdot \cos x$

na $(0, \pi) + k\pi$ pro lib. $A, B \in \mathbb{R}$.