4. zkoušková písemka, MAF041, LS 2008

1. [10] Buď
$$f(x,y) := |x|\sqrt[4]{x^2+y^2} - 2y$$
Zjistěte, zda je f spojitá v $(0,0)$ a spočtěte zde její limitu. Spočtěte $\partial f/\partial x(0,0)$ a $\partial f/\partial y(0,0)$. Rozhodněte, zda existuje $\mathrm{d}f(0,0)$ a případně ho najděte.

2. [15] Nalezněte potenciál příslušný k rovnici ve tvaru totálního diferenciálu
$$\left(\frac{\cos(xy)}{x} + \frac{1}{xy}\right)\mathrm{d}x + \frac{\cos xy}{y}\mathrm{d}y = 0.$$
Jak vypadají řešení dané rovnice?

3. [15] Buď $A = (1,0,-1)$, $f(x,y,z) = \sin(x+y+z)+\cos(xyz)$, $g(x,y,z) = \cos(x+y+z) + (1+xy)z$. Zjistěte, zda lze na okolí bodu A vypočítat fce $x(z)$ a $y(z)$ z rovnic $f(x,y,z) = 1$ a $g(x,y,z) = 0$. Spočtěte $x'(-1)$ a $y'(-1)$.

4. [20] Buď $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 1, |y| < 3\}$, $f(x,y) = (x^2 - y^2)\exp(-x^2-y^2)$. Najděte body podezřelé z lokálního extrému fce f na $\mathbf{R}^2$ a rozhodněte o typu lokálního extrému. Rozhodněte, zda existuje $\max f$ a $\min f$ na $\overline{M}$. Najděte $\sup f$ a $\inf f$ na M a rozhodněte, zda se nabývá či nikoli.

- Vše podrobně zdůvodněte.
- Nezapomeňte se podepsat a ověřit předpoklady používaných vět.
- Zkuste integrační faktor závislý na x nebo xy.
- $\mu = \mu(\Phi) : \dfrac{\mu'}{\mu} = \dfrac{N_x - M_y}{M\Phi_y - N\Phi_x}$