Kapří problém

Zadání

Vývoj počtu organismů určitého druhu v ekosystému lze ve velmi zjednodušeném modelu popsat diferenciální rovnicí $y' = ay(P_m - y)$, kde P_m označuje maximální počet jedinců, kteří se v daném prostředí mohou uživit.

Tato rovnice vyjadřuje skutečnost, že tempo rozmnožování organismů je přibližně přímo úměrné jejich počtu, je-li jich v ekosystému poměrně málo. Když se však jejich počet blíží k určené horní mezi, rychlost jejich přírůstku opět klesá k nule.

V této úloze se popsaný model aplikuje na počet kaprů v chovném rybníku a hledá se optimální interval mezi výlovy, aby byl dosažen maximální zisk za jednotku času, je-li dána cena jednoho kapra, náklady na výlov a hodnoty parametrů a a P_m.

Řešení

Diferenciální rovnici

$$y' = ay(P_m - y)$$

vyřešíme separací proměnných za předpokladu $y \neq 0$ a $y \neq P_m$:

$$ax = \int \frac{\mathrm{d}y}{y(P_m - y)} = \frac{1}{P_m} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{P_m - y} \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{P_m} \ln \left| \frac{y}{y - P_m} \right| + C$$

Vyjádříme y jako

$$y = \frac{P_m}{1 \pm \exp(-P_m a(x - x_0))},$$

kde $x_0 \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

Zřejmě při volbě znaménka $+$ je funkce řešením na celém $\mathbb{R}$ (a jejím oborem hodnot je interval $(0, P_m)$), zatímco pro znaménko $-$ musíme vyjmout bod $x = x_0$. Dostáváme tedy řešení na intervalech $(-\infty, x_0)$ (obor hodnot je pak[1] $(-\infty, 0)$) a (x_0, ∞) (obor hodnot (P_m, ∞)).

Snadno také nahlédneme, že $y = 0$ a $y = P_m$ jsou triviální řešení dané rovnice.

Reálný stav rybníku zřejmě popisuje pouze případ znaménka $+$, budeme se tedy dále zabývat pouze jím. Bez újmy na obecnosti můžeme položit $x_0 = 0$

Řešíme problém, v jakých časových intervalech dělat výlovy, aby byl výnos maximální. Nejdříve se přesvědčíme, že pro daný časový interval T je nejvýhodnější vylovit ryby v okamžiku $x = T/2$ a upravit jejich množství tak, abychom se vrátili do stavu $x = -T/2$. Podívejme se, jaké bude množství ryb získané v případě, že lovíme v okamžiku $x = s + T/2$ a vracíme se do stavu $x = s - T/2$.

[1] Předpokládáme-li $P_m > 0$.

Zaveďme si označení $S = \exp(-P_m as)$ a $\tau = \exp(P_m aT/2)$. Pak bude hledané množství zjevně rovno rozdílu

$$\frac{P_m}{1+S/\tau} - \frac{P_m}{1+S\tau} = \frac{P_m S(\tau - 1/\tau)}{1+S^2+S(\tau+1/\tau)} = \frac{P_m(\tau-1/\tau)}{1/S+S+(\tau+1/\tau)}.$$

Okamžitě vidíme, že tento výraz nabývá za předpokladu $\tau > 1$ a $S > 0$ maxima pro $S = 1$, tedy $s = 0$. Tím je uvažované tvrzení ověřeno.

Zbývá zodpovědět otázku, jak zvolit T, aby byl výnos maximální. Nechť $k > 0$ označuje cenu jednoho kapra a $v > 0$ náklady na výlov. Pak bude zisk připadající na jednotku času roven

$$\frac{1}{T}\left(k\left(\frac{P_m}{1+e^{-P_m aT/2}} - \frac{P_m}{1+e^{P_m aT/2}}\right) - v\right) = \frac{1}{T}\left(kP_m \frac{e^{P_m aT/2}-1}{e^{P_m aT/2}+1} - v\right)$$

Tento výraz máme maximalizovat jako funkci T. Označíme-li si $\alpha = kP_m/v$ a $\beta = P_m a/4$, lze jej přepsat na tvar

$$z(T) = \frac{v}{T}\left(\alpha \operatorname{tgh}(\beta T) - 1\right)$$

Zřejmě má smysl uvažovat pouze o případu $\alpha > 1$. Jinak by totiž pro každé kladné T byl zisk záporný, jinými slovy výlov by byl vždy ztrátový (velikost ztráty ovšem nemá minimum, můžeme ji libovolně přiblížit nule, necháme-li jít T do nekonečna).

Při hledání extrému můžeme vynechat kladnou multiplikativní konstantu v. Provedeme pak derivaci podle T a dostaneme

$$z'(T) = -\frac{1}{T^2}\left(\alpha \operatorname{tgh}(\beta T) - 1\right) + \frac{1}{T}\alpha\beta\frac{1}{\cosh^2(\beta T)}.$$

Tento výraz je pro $T > 0$ roven nule, právě když

$$\alpha \operatorname{tgh}(\beta T) - 1 = \frac{T\alpha\beta}{\cosh^2(\beta T)} \Leftrightarrow \alpha\sinh(\beta T) - \cosh(\beta T) = \frac{T\alpha\beta}{\cosh(\beta T)}.$$

Zavedeme si substituci $2\beta T = u$, vynásobíme $\cosh(\beta T)$ a využijeme vztahy pro hyperbolické funkce:

$$\sinh u - \frac{1+\cosh u}{\alpha} = u \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^u\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{2}e^{-u}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) - \left(u+\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

Tuto rovnici upravíme a vyřešíme jako kvadratickou rovnici v e^u:

$$u = \ln\left(\frac{\alpha u + 1 + \sqrt{\alpha^2u^2+2\alpha u+\alpha^2}}{\alpha-1}\right) \equiv f(u)$$

Zderivováním funkce $f(u)$ a následnými úpravami dostaneme

$$f'(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+2u/\alpha+1}} < \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$$

Ještě si všimneme, že funkce $f(u)$ je kladná, spojitá a rostoucí na $(0,\infty)$ a platí $\lim_{u\to 0+} f(u) = \ln\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \equiv A$. Zřejmě je tedy $\forall u \in (0,\infty) : f(u) > A > 0$.

Proto na $(0, A]$ neexistuje pevný bod funkce f. Funkce f navíc zřejmě zobrazuje interval $[A,\infty)$ do sebe.

Z nerovnosti pro derivaci f' a použitím Lagrangeovy věty o přírůstku funkce plyne, že f je na $[A,\infty)$ $(A^2+1)^{-1/2}$-Lipschitzovská a je tedy kontraktivním zobrazením na úplném metrickém prostoru $[A,\infty)$ s obvyklou metrikou. Podle Banachovy věty o kontrakci tedy existuje jediný pevný bod funkce f na $[A,\infty)$, a tedy i na $(0,\infty)$. Označme si jej u^*

Funkce $z'(T)$ tedy má na $(0,\infty)$ jediný nulový bod $u^*/2\beta$. Protože pro $T\to\infty$ je $z'(T)T^2 = (1-\alpha+o(1))$, konverguje zde $z'(T)$ k nule zdola a je tedy $z'(T) < 0$ pro $T > u^*/2\beta$. Podobně platí pro $T\to 0+$: $z'(T)T^2 = 1 + o(1)$. Proto $z'(T) > 0$ pro $T < u^*/2\beta$. V bodě $u^*/2\beta$ má tedy funkce z globální maximum.

Jestliže budeme iterovat funkci f, bude posloupnost takto získaných hodnot konvergovat k pevnému bodu u^*. Počáteční bod u_0, v němž začneme iterovat, můžeme vybrat libovolně (ale v $\mathbb{R}^+$ samozřejmě), tedy i $u_0 \in (0, A)$, protože vždy $u_i > A$ pro $i \geq 1$.

Přesnost, s jakou jsme se hodnotou u_i přiblížili hledané hodnotě u^* můžeme odhadnout, známe-li hodnotu $|u_i - u_{i-1}|$ (musí ovšem být $u_{i-1} > A$). Potom totiž $\forall j > i : |u_j - u_{j-1}| < q^{j-i}|u_i - u_{i-1}|$ (kde $q = (A^2+1)^{-1/2}$) a s použitím trojúhelníkové nerovnosti pak dostaneme odhad

$$|u^* - u_i| \leq \sum_{j=i+1}^{\infty} |u_j - u_{j-1}| < |u_i - u_{i-1}| \sum_{j'=1}^{\infty} q^{j'} = \frac{q|u_i - u_{i-1}|}{1-q}$$

To můžeme dále upravit na

$$|u^* - u_i| < \frac{|u_i - u_{i-1}|}{\sqrt{A^2+1} - 1}$$

Nyní se konečně můžeme pokusit numericky nalézt řešení pro nějaké konkrétní α. Všimneme si, že α vyjadřuje poměr částky, kterou bychom získali výlovem rybníka za maximálního stavu, a ceny výlovu. Odhadl jsem, že rozumná hodnota by se měla pohybovat řádově v jednotkách (pochybuji, že je chov kaprů natolik výnosný, aby zisk z výlovu celého rybníka byl více než desetinásobkem ceny výlovu). Položil jsem tedy $\alpha = 5$. Počáteční hodnota u nechť je $u_0 = 1$. Pak dostáváme postupně:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1 \\
u_1 &= 1.23445 \\
u_2 &= 1.37738 \\
u_3 &= 1.45695 \\
u_4 &= 1.49904 \\
u_5 &= 1.52070 \\
u_6 &= 1.53170 \\
u_7 &= 1.53723 \\
u_8 &= 1.54001 \\
u_9 &= 1.54141 \\
u_{10} &= 1.54210 \\
u_{11} &= 1.54245 \\
u_{12} &= 1.54263 \\
u_{13} &= 1.54271 \\
u_{14} &= 1.54276 \\
u_{15} &= 1.54278
\end{aligned}$$

Pro naši konkrétní hodnotu α vychází $A \doteq 0.405$ a $q \doteq 0.927$ (to vysvětluje poměrně pomalé tempo konvergence) a použitím výše uvedeného odhadu dostaneme $|u^* - u_{15}| < 0.0004$. Tedy platí

$$1.5423 < u^* < 1.5431.$$

Nyní zbývá vypočítat optimální T. K tomu potřebujeme odhadnout β. Uvědomíme si, že $1/2\beta = 2/P_m a$ představuje čas, za nějž se počet kaprů v rybníku zvýší z $P_m/2$ na $P_m/(1+e^{-2}) \doteq 0.88P_m$, tedy z 50% na 88% plného stavu.

Tato doba by se podle mého odhadu mohla pohybovat řádově v měsících. Položme tedy $1/2\beta = 8$ měsíců a optimální doba T tak vychází přibližně jeden rok, což zhruba odpovídá realitě.

Celý model však příliš realistický není, protože nebere v úvahu rozdílnou hmotnost (a tedy i cenu) mladých a starých ryb, útlum jejich metabolismu (a tím i rychlosti růstu jejich počtu) v zimě, atd. atd.