

Příklady na 8. týden

Funkce více proměnných

Lokální extrémy funkcí více proměnných

Hledejte lokální extrémy následujících funkcí

1. $x^2 + y^2$; $x^2 - y^2$; $-x^2 - y^2$
2. $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
3. $(x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$
4. $(2x^2 - xy + y^2/3 - 5x + 5y/3 + 10/3)e^{x+y}$
5. $xy \ln(x^2 + y^2)$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$, 0 pro $(x, y) = (0, 0)$
6. $x + y + 4 \cos x \cos y$
7. $\sin x + \cos y + \cos(x - y)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$
8. $x - 2y + \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x \neq 0$
9. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
10. $(ax + by + cz)e^{-x^2 - y^2 - z^2}$

a 3. týden

34. Pomocí hledání vázaných extrémů dokažte

a) AG nerovnost $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$, $a_i \geq 0$

b) Hölderovu nerovnost $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n y_i^q)^{\frac{1}{q}}$, $x_i, y_i \geq 0$,
 $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

35. V počátku kartézských souřadnic je umístěn bodový náboj Q .

a) Jaké bodové náboje Q_A , Q_B , Q_C musíme umístit do bodů $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$, $C = (0, 0, 4)$, aby náboj q v bodě $(1, 1, 1)$ byl v rovnováze.

b) Bude tato rovnováha stabilní?

a deriváty

19.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$$

Funkce více proměnných

Vázané extrémy

Nalezněte extrémy dané funkce vzhledem k vazbě

20. $xy; x + y = 1$

21. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}; x^2 + y^2 = 1$

22. $x^2 + y^2; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

23. $x^m y^n z^p; x + y + z = a, m, n, p, a > 0$

24. $\sin x \sin y \sin z; x + y + z = \frac{\pi}{2}, x, y, z > 0$

25. $\sum_{i=1}^n x_i^p; \sum_{i=1}^n x_i = a, p > 1, a \geq 0$

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce na uvedené množině

26. $x - 2y - 3; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1$

27. $x^2 - xy + y^2; |x| + |y| \leq 1$

28. $x^2 + y^2 - 12x + 16y; x^2 + y^2 \leq 25$

29. $x + y + z; x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

30. Při jakých rozměrech má kvádr daného objemu nejmenší povrch?

31. Do daného kužele vepište hranol o n-úhelníkové podstavě, který má maximální objem.

32. Najděte vzdálenost bodu (p, q, r) od roviny $ax + by + cz + d = 0$.

33. Najděte vzdálenost d dvou mimoběžek

$$\begin{aligned} x &= X_1 + at & x &= X_2 + pt \\ y &= Y_1 + bt & y &= Y_2 + qt \\ z &= Z_1 + ct & z &= Z_2 + rt. \end{aligned}$$