Určete $\inf\limits_M f$ a $\sup\limits_M f$ a rozhodněte, zda se na M nabývají či nikoli.

$$f(x,y) := e^{-(x^2+2y^2)}(x^2+y^2)$$

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}$$

---

1) Vidíme $f(x,y) > 0$ na M a zároveň $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x) = 0 \Rightarrow$

1 $\inf\limits_M f = 0$ a nenabývá se

2) $f(1,1) = 2 \cdot e^{-3}$ a

$$|f(x,y)| < (x^2+y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)} \xrightarrow[x^2+y^2 \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \exists \alpha > 0 : \sqrt{x^2+y^2} > \alpha \Rightarrow |f(x,y)| < 2 \cdot e^{-3} = f(1,1)$$

1 $\Rightarrow \sup\limits_M f$ ~~nabývá~~ $= \sup\limits_{M \cap [0,\alpha]^2} f$

3) Vyšetříme f na $[0,\alpha]^2$.

$[0,\alpha]^2$ je uzavřená, omezená množina

1 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\Big\} \Rightarrow f$ nabývá na M svého maxima.

Kde? a) Buď to musí být v $(0,\alpha)^2$ v krit. bodech

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[2x + (x^2+y^2)(-2x)\right] \cdot e^{-(x^2+2y^2)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left[2y + (x^2+y^2)(-4y)\right] e^{-(x^2+2y^2)} = 0$$

1 $\Rightarrow$ Krit. body: $(0,0)$, $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\pm 1, 0)$, ale žádný neleží uvnitř!

b) Nebo na hranici

$y = 0 \quad x \in [0,\alpha]$ I	$y = \alpha, \; x \in [0,\alpha]$ II
$y \in [0,\alpha] \quad x = 0$ III	$y \in [0,\alpha], \; x = \alpha$ IV

Max nemůže ležet v II & $\underline{\mathrm{IV}}$, viz 2).

Vyšetřeme I)

Def: $g(x) = f(x,0) = e^{-\cancel{x}^2} x^2$; $g'(x) = e^{-x^2}\left(2x + x^2\cdot(-2x)\right)$

$\Rightarrow x = 0$ nebo $x = \pm 1$.

Podezřelé body: $f(0,0) = 0$; $f(1,0) = e^{-1}$

III) $g(y) := f(0,y) = e^{-2y^2} y^2$; $g'(y) = e^{-2y^2}\left(2y - 4y\cdot y^2\right)$

$\Rightarrow \cancel{x}y = 0$ nebo $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

1 Podezřelé body: $f(0,0) = 0$; $f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1}\cdot\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{[0,\alpha]^2} f = e^{-1}$ a nabývá se v bodě $(1,0) \notin M$.

1

~~Protože e^{-1} nenabývá f v žádném jiném bodě $[0,\alpha]$, viz 2), I, III,~~

~~sup~~

Protože f je v $(1,0)$ spojitá ~~…~~, $(1,0) \in \partial M \Rightarrow$

$$\sup_M f = e^{-1}.$$

Protože ~~…~~ f nenabývá e^{-1} v žádném jiném bodě $[0,\alpha]^2$ než $(1,0)$, viz 2, I, $\underline{\mathrm{III}}$

1 $\sup\limits_M f = e^{-1}$ a nenabývá se na M.

Buď $f(x,y) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{x^{\alpha}}{(\sin x)^2 + (\sin y)^2} \end{cases}$. Rozhodněte pro která $\alpha \in \mathbb{N}$ je f

1) spojitá v $(0,0)$
2) ex. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
3) prod. = 3 nepovinné
   tot. diferenciál v $(0,0)$ a ~~nepovinné~~ pokud ex.

ad 1) Pro $\alpha \leq 0$ neex. $\lim_{y \to 0} f(0,y)$ konečná $\Rightarrow \alpha > 0$.

pro $\alpha > 0$ $\lim_{y \to 0} f(0,y) = 0 \Rightarrow$ lim musí být 0

pro $\alpha \in (0, 2]$ $\lim_{x \to 0+} f(x,0) \neq 0 \Rightarrow$ lim neex. 1

pro $\alpha > 2$: $|f(x,y)| \leq \dfrac{x^{\alpha}}{(\frac{2}{\pi})^2 \cdot (x^2 + y^2)} < (\frac{\pi}{2})^2 \cdot x^{\alpha - 2} \longrightarrow 0$ pro $\|(x,y)\| \to 0$ 1

$x, y < \frac{\pi}{2}$

a tedy lim ex.

ad 2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$ pro $\alpha > 0$ 1

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\alpha}}{h(\sin h)^2} =$$

$$= \begin{cases} \text{neex.} & \alpha = 1,2 \\ 1 & \alpha = 3 \\ 0 & \alpha > 3 \end{cases}$$

1

3) Bonus: Kandidát na TD pro $\alpha = 3$ v $(0,0)$ je

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ L(h_1, h_2) = h_1$$

B

Je to TD?

$$0 \overset{?}{=} \lim_{h \to 0 \text{ v } \mathbb{R}^2} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - L(h_1,h_2)|}{\|h\|} =$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{h_1^3}{(\sin h_1)^2 + (\sin h_2)^2} - h_1 \right) \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h_1^3 - h_1(\sin h_1)^2 - h_1(\sin h_2)^2|}{((\sin h_1)^2 + (\sin h_2)^2) \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$ neex. stačí volit

$$h_1,\ h_2 = 0 : \lim_{h_1 \to 0} \frac{|h_1^3 - h_1(\sin h_1)^2|}{(\sin h_1)^2 \cdot |h_1|} = 0$$

$$h_1 = h_2 : \lim_{h_1 \to 0\pm} \frac{|h_1^3 - 2h_1(\sin h_1)^2|}{2(\sin h_1)^2 \cdot \sqrt{2} \cdot |h_1|} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$