1) Nalezněte $\sup_M f$, $\inf_M f$ pokud $f(x,y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 - y$ a $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1,\ y \le \frac{1}{2}\}$. Rozhodněte, zda se sup a inf na M nabývá.

a) M není uzavřená ale je omezená.
Extrémy budeme vyšetřovat na $\overline{M} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1, y \le \frac{1}{2}\}$.
Ta je omezená uzavřená => kompaktní! 1

b) f je spojitá na $\mathbb{R}^2$ protože je polynom. 1

c) podezřelé body uvnitř:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -x \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y-1$$

jediný podezřelý bod: $(0,-\frac{1}{2})$; $f(0,-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ 1

d) PB na hranici: $\underline{x^2+y^2=1}$

$$g(y) := -\frac{1}{2}(1-y^2) - y^2 - y = -\frac{1}{2}y^2 - y - \frac{1}{2}$$

$g'(y) = -y-1$ => kr. bod $y=-1$ => $x=0$
=> $f(0,-1) = 0$

g vyšetřujeme na $[-1, \frac{1}{2}]$ takže další kr. bod je $x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$: $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-3-2-4}{8} = -\frac{9}{8}$ 1

$\underline{y=\frac{1}{2}}$: $g(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}$; $g'(x) = -x$

=> jediný kr. bod $(0,\frac{1}{2})$: $f(0,\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$

$g(x)$ vyšetřujeme na $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ a krajní body už jsme vyšetřili v minulém případě. 1

e) f spojitá na kompaktu $\overline{M}$ $\Rightarrow$ nabývá max a min v

některém z podezřelých bodů

$\Rightarrow$ $\max\limits_{\overline{M}} f = \frac{1}{4}$ a nabývá se v $(0, -\frac{1}{2})$

$\min\limits_{\overline{M}} f = -\frac{9}{8}$ a nabývá se v $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1

f) $\sup\limits_{M} f = \frac{1}{4}$ a nabývá se v $(0, -\frac{1}{2})$

$\inf\limits_{M} f = -\frac{9}{8}$ protože f je spojitá v $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

nenabývá se protože $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \notin M$ a v jiném podezřelém

bodě z $\overline{M}$ se tato hodnota nenabývá. 1

2) Dodefinujte $f(x,y) = \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y}$ spojitě na $\mathbb{R}^2$. Rozšíření označte $\tilde{f}$. Spočtěte $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0,0)$. Rozhodněte zda v $(0,0)$ ex. TD a napište jej.

a) Spojité dodefinování: ~~$\tilde{f}(x,y) = \frac{\sin y}{y}$~~

označ: $g(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$

$\tilde{f}(x,y) = g(x) \cdot g(y)$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$ (součin 2 spoj. fcí)

a $= f(x,y)$ na $x \cdot y \neq 0$. 2,5

b) Ze symetrie: $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\tilde{f}(0,y) - \tilde{f}(0,0)}{y} =$

$= \lim\limits_{y \to 0} \frac{g(y) - 1}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{1 - \frac{y^2}{3!} + o(y^2) - 1}{y} = 0$

Spočtěte si Taylorovu řadu g! 2,5

c) TD v 0: Kandidát: $L(l_1, l_2) := 0$

Chceme ukázat: $0 = \lim\limits_{l \to 0} \frac{|\tilde{f}(l_1, l_2) - 1|}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$ $\left(= \lim\limits_{l \to 0} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \left(\cancel{g(x) g(y) - x, y} \right) \right)$

Platí: $g(z) = 1 - \frac{z^2}{6} + o(z^3)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |z| < \delta \Rightarrow \left| \frac{g(z) - \left(1 - \frac{z^2}{6}\right)}{z^3} \right| < \varepsilon$

tedy:

$1 - \frac{z^2}{6} - \varepsilon z^3 \leq |g(z)| \leq 1 - \frac{z^2}{6} + \varepsilon z^3$

Tedy pro $|x| < \delta, |y| < \delta$:

$$\frac{|f(h_1, h_2) - 1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{\left(1-\frac{h_1^2}{6}+\varepsilon h_1^3\right)\left(1-\frac{h_2^2}{6}+\varepsilon h_2^3\right)-1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{36}h_1^2h_2^2 - \varepsilon h_1^3\frac{h_2^2}{6} - \varepsilon h_2^3\frac{h_1^2}{6} + \varepsilon^2 h_1^3 h_2^3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \xrightarrow[\text{pro } \sqrt{h_1^2+h_2^2}\to 0]{} 0$$

Tedy TD f v $(0,0)$ ex. a je L.