$\boxed{\text{DÚ9}}$ 22, 24, 35 [redacted] Kp 180 MAF041

[illegible]

$\boxed{22}$ $f(x,y) = x^2+y^2 \qquad M = \left\{ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \right\}$

$$F(x,y,\lambda) := x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$$

$$f,\ g := \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{a} \neq 0$$

Extrémy f se nabývají v ext. bodech podle Lagr. věty.

~~Platí~~ ~~[illegible]~~ $\forall (x,y) \in M \Rightarrow x = a\left(1-\frac{y}{b}\right)$

$$f\left(a\left(1-\frac{y}{b}\right), y\right) = y^2 + a^2\left(1-\frac{y}{b}\right)^2 \xrightarrow[\text{pro } y \to +\infty]{} +\infty$$

$\Rightarrow$ f není na M omezená shora

Hledejme extremální body:

$$\nabla F = \begin{array}{l|ll} 2x+\frac{\lambda}{a} & = 0 & \cdot\left(-\frac{a}{2}\right) \\ 2y+\frac{\lambda}{b} & = 0 & \cdot\left(-\frac{b}{2}\right) \end{array}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$$

$$\lambda\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2a},\ y = +\frac{1}{2b}$$

Našli jsme pouze jeden ext. bod $\Rightarrow$ musí být bod minima

($M \cap \mathcal{U}_R(0)$ je cpt a pro R dost velké platí, že

$f > f\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2b}\right)$ na $M \cap \partial\mathcal{U}_R(0)$)

$$\Rightarrow \min_M f = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right),\quad \sup_M f = +\infty$$

24) $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$

$$M = \left\{ x+y+z = \frac{\pi}{2},\ x>0,\ y>0,\ z>0 \right\}$$

Maximum f nezaručené $\left(x,y,z < \frac{\pi}{2} \right)$

$$\overline{M} = \left\{ x+y+z = \frac{\pi}{2},\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \right\}$$

kompaktní!

$f \equiv 0$ na $\overline{M} \setminus M$, ukázat!

Najdeme extrém bodu vzhledem k M (Lagrangeova věta)

1) $g(x,y,z) = x+y+z-\frac{\pi}{2} \in C^\infty$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \ \checkmark$$

2) $f \in C^\infty$

3) $F := f + \lambda g$

$$\nabla F = \left.\begin{array}{l} \cos x \sin y \sin z + \lambda \\ \sin x \cos y \sin z + \lambda \\ \sin x \sin y \cos z + \lambda \end{array}\right| \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \qquad A$$

$$\Rightarrow \quad \sin z \left(\sin(y-x) \right) = 0 \qquad B$$

$$\sin x \left(\sin(z-y) \right) = 0 \qquad C$$

C) buď $x=0$ ale to je nepřípustné

nebo $z=y$ (nic nového, být bodem M) "$+ 2\pi$"

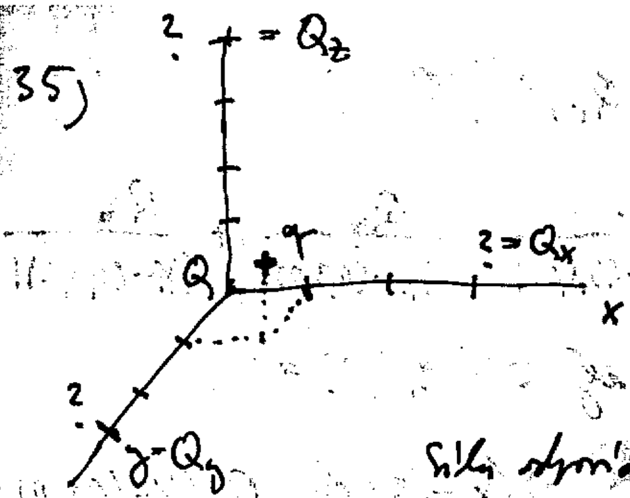
B $\Rightarrow$ jediné přípustné $y=z=x=\frac{\pi}{6}$

$(x,y,z) \in M$

$f\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}$ a musí to být maximum f na $\overline{M}$

$$\Rightarrow \max_M f = \frac{1}{8}; \quad \inf_M f = 0$$

35)



Síla odpovídající náboji Q_x má směr

$$(1,1,1) - (3,0,0) = (-2,1,1)$$

$$Q_y \sim (1,1,1) - (0,3,0) = (1,-2,1)$$

Vezmeme normálu: $(3,3,3)$ a spočítáme bilanci sil v tomto směru. Náboje Q_x a Q_y se vyrovnají!!

$$F_{qQ} = \frac{Qq\,[(1,1,1)-(0,0,0)]}{4\pi\varepsilon_0 \,|(\sqrt{3})|^3}$$

$$(1,1,-3)$$

$$F_{qQ_z} = \frac{q Q_z \,[(1,1,1)-(0,0,3)]}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 11^{3/2}} \qquad \|x\| = \sqrt{11}$$

Průmět vektoru $(1,1,-3)$ do $(1,1,1)$ je:

$$\frac{-1\,(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|^2} = -\frac{(1,1,1)}{3}$$

Postačí, aby byla nulová normálová složka sil:

$$(F_{qQ} + F_{qQ_z})\cdot(1,1,1) = 0$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(Q\cdot\frac{3}{3^{3/2}} + \frac{-1}{11^{3/2}}\cdot Q_z\right) = 0 \Rightarrow Q_z = \frac{11^{3/2}}{\sqrt{3}}\,Q$$

Podobně pro Q_x a Q_y.

Jinak: Celkový potenciál Q, Q_x, Q_y, Q_z je

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{|X|} + \frac{Q_x}{|X-(3,0,0)|} + \frac{Q_y}{|X-(0,3,0)|} + \frac{Q_z}{|X-(0,0,4)|}\right)$$

Hledáme Q_x, Q_y, Q_z tak, aby $\nabla V(1,1,1) = 0$.

Přičemž: $$\nabla V = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q X}{|X|^3} + \frac{Q_x(X-(3,0,0))}{|X-(3,0,0)|^3} + \frac{Q_y(X-(0,3,0))}{|X-(0,3,0)|^3} + \frac{Q_z(X-(0,0,4))}{|X-(0,0,4)|^3}\right)$$ a v $(1,1,1)$ to vypadá

$$\nabla V(1,1,1) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\sqrt{3}^3}(1,1,1) + \frac{Q_x(-2,1,1)}{\sqrt{6}^3} + \frac{Q_y(1,-2,1)}{\sqrt{6}^3} + \frac{Q_z(1,1,-3)}{\sqrt{11}^3}\right)$$ Tedy dostáváme soustavu rovnic pro 3 neznámé!

$$\frac{Q_x}{(\sqrt6)^3}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{Q_y}{(\sqrt6)^3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \frac{Q_z}{(\sqrt{11})^3}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} = -\frac{Q}{(\sqrt3)^3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Eliminací dostaneme:

$$(Q_x, Q_y, Q_z) = \left(8\sqrt2, 8\sqrt2, 11^{3/2}\cdot\frac{\sqrt3}{3}\right)\cdot Q$$

Ad b) Předpokládejme, že v $(1,1,1)$ má V ostré lok. min. Ukážeme, že to není možné vzhledem k $\Delta V = 0$. Ověřte!

Sporem! Pokud by to $(1,1,1)$ bylo ostré lok. min. Ex. $\rho > 0, \varepsilon > 0$:

$V > V(1,1,1) + \varepsilon$ na $\partial_\rho B(1,1,1)$.

Uvažme: $$W(X) := V(X) + \frac{|X-(1,1,1)|^2}{\rho^2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

W nabývá svého minima na množině $\partial_\varrho B(1,1,1)$. Vlastně!

Označme si takový bod $\tilde{X}$. Co v něm platí?

$$\cancel{\frac{\partial W}{\partial x}(\tilde{X})} = \frac{\partial W}{\partial y}(\tilde{X}) = \frac{\partial W}{\partial z}(\tilde{X}) = 0$$

Navíc $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(\tilde{X}) \geq 0$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(\tilde{X}) \geq 0$, $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}(\tilde{X}) \geq 0$

, protože $\tilde{X}$ je minim.! $\Rightarrow$ $\Delta W(\tilde{X}) \geq 0$

ale jsme spočítali, že $\Delta W = \frac{2\varepsilon}{2\varrho^2}\cdot 3 > 0$

(Využili jsme $\Delta V = 0$)   Spor!

Více viz slabý a silný princip maxima pro Laplaceovu rovnici DIR044.

(Také co dělat v případě – V pouze lze minimum nevadí).