DÚ 5 – MAF041

25) $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to +\infty} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0$, protože

$$0 \le \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \le \frac{\sqrt{x^4}}{x^4+y^4} + \frac{\sqrt{y^4}}{x^4+y^4} \le \frac{2\cdot\sqrt{x^4+y^4}}{x^4+y^4}.$$

Pokud $\|(x,y)\| \to +\infty$, tak $\sqrt{x^4+y^4} \to +\infty$ a $x^4+y^4 \to +\infty$ a tedy $\dfrac{2\sqrt{x^4+y^4}}{x^4+y^4} \to 0$

23) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \exp\left(x^2y^2 \ln(x^2+y^2)\right) = 1$, protože

$$\underset{\uparrow\atop x^2+y^2<1}{0 \ge} x^2y^2 \ln(x^2+y^2) \ge (x^2+y^2)^2 \ln(x^2+y^2) \longrightarrow 0$$

pokud $x^2+y^2 \to 0+$

28) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ neex. stačí volit $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, pak

$$(x_n, y_n) \to (0,0) \text{ a } \frac{2x_ny_n}{x_n^2+y_n^2} = 1 \not\to 0 \quad \text{pro } n \to +\infty$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^6}}$ ~~neexistuje (pro osách by musela být 0)~~

~~ale volba $x^{4/3}=y$ dává:~~

~~$\dfrac{x^{3/4}}{\sqrt{x^4+x^{6/4}}} \xrightarrow[x\to 0+]{} 1$ protože $4 > \frac{6}{4}$~~.

6/1 $\boxed{\text{Ulg}}$ $f(x,y) = \lg(x+y)$

$Df.$ obor: $x+y > 0$

Na def. oboru je f spojitá, protože je složení ze spojitých funkcí!

Parc. derivace ex. všude v Df

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

6/2 $f(x,y,z) = \cos x \cosh y$

$Df = \mathbb{R}^3$ a je na něm spojitá (součin spojitých funkcí)

$\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) =}$ Parc. derivace existují všude na Df.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\sin x \cosh y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \cos x \sinh y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$$

6/6 $f(x,y,z) = x^{y/z} := \exp\left(\frac{y}{z}\lg x\right)$

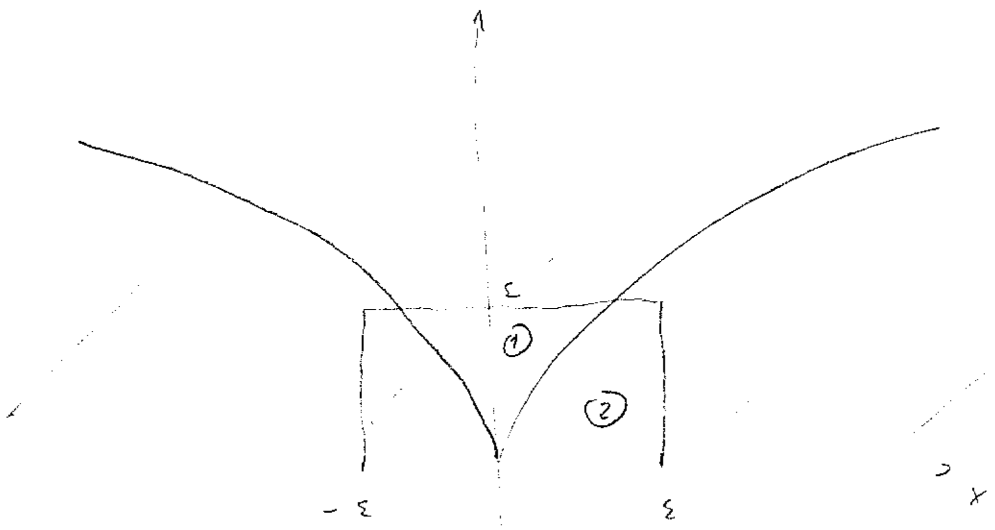
Df: $x > 0$; $z \neq 0$ (V případě, že $\frac{y}{z} \in \mathbb{Q}$ může mít smysl i $x < 0$, ale nebudeme to studovat)

Na Df je f složení ze spojitých fcí $\Rightarrow$ f spoj na Df

Parciální derivace existují na Df

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{y}{z}\, x^{\frac{y}{z}-1} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}\, \frac{\lg x}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^{y/z}\left(-\frac{\lg x}{z^2}\right)$$



$x^5 = y^6 \sim x = \pm y^{3/2}$ Předpokládejme, že $\|(x,y)\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

① $|x| \leq |y|^{3/2}$

$$\left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^5+y^6}} \right| \leq \frac{|xy^2|}{y^3} \leq \frac{y^{7/2}}{y^3} = y^{1/2} < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

② $|x| \geq |y|^{3/2}$ $\left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^5+y^6}} \right| \leq \frac{|xy^2|}{\sqrt{x^5}} \leq \frac{x^{1+\frac{4}{3}}}{x^2} = x^{1/3} < \varepsilon^{1/3}$

Tedy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^5+y^6}} = 0$.

6/7 $\quad f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2+y^2}$

Abychom mohli vůbec mluvit o parciálních derivacích, potřebujeme f dodefinovat v $(0,0)$. Aby měly parciální derivace šanci existovat, dodefinujeme

$$f(0,0) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 \quad \text{pokud } \alpha > 0.$$

Rozmyslete si, že pro $\alpha \le 0$ limity neexistují.

Počítejme $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2\alpha}\sin x^{-2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^{2\alpha-1} \sin x^{-2} = \begin{cases} 0 & 2\alpha - 1 > 0 \\ \text{neex.} & 2\alpha - 1 \le 0 \end{cases}$$

Tedy $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0$ pro $\alpha > \frac{1}{2}$ a neex. jinak.

Pro $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ podobně.