Metrické prostory

Cílem přednášky je vybudovat diferenciální počet fcí více proměnných v podobě, jako tomu bylo v minulém semestru pro fce jedné proměnné.

Problém: Základním pojmem je limita, pro jejíž zavedení potřebujeme ~~vybudovat~~ definovat okolí, potažmo vzdálenost.

Příklady: Vzdušná vzdálenost, vzdálenost po silnici v km, vzdálenost po silnici v min, turistické značky v Polsku v minutách, časová dostupnost pomocí hromadné dopravy

Def: (P,ρ) je metrický prostor, jestliže P je množina a $\rho: P\times P \to \langle 0,+\infty)$ splňuje:

(i) $\rho(x,y)=0 \iff x=y$

(ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

(iii) $\rho(x,z)\le \rho(x,y)+\rho(y,z)$

Příklady: na $\mathbb{R}$: $\rho(x,y)=|x-y|$, $\frac{1}{3}|x-y|$, $\operatorname{arctg}|x-y|$, $\rho(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$ diskrétní metrika, tedy pro lib. množinu ex. metrika

na $\mathbb{R}^N$: $\rho(x,y)=\sqrt[2]{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_N-y_N)^2}$, $|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\dots+|x_N-y_N|$, ...

na $C([0,1])$: $\rho(f,g)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$, $\int_0^1|f-g|\,dx$, $\left(\int_0^1(f-g)^2\,dx\right)^{1/2}$, ...

hezčí situace:

Def: $(P,\|\cdot\|)$ NLP, jestliže P je vektorový prostor a $\|\cdot\|: P\to\langle 0,+\infty)$ splňuje:

(i) $\|x\|=0 \iff x=0$

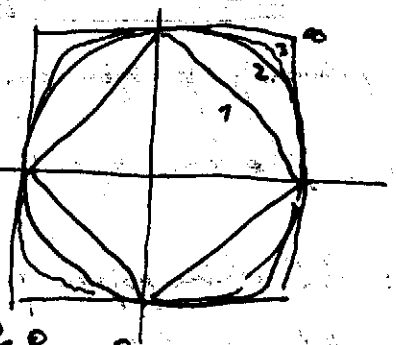
(ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ $\forall \alpha\in\mathbb{R}(\mathbb{C}), x\in P$

(iii) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

Tvrzení: $(P,\|\cdot\|)$ NLP $\Rightarrow \rho(x,y)=\|x-y\|$ definuje metriku

Obrácení to neplatí, viz diskrétní metrika, $\operatorname{arctg}|x-y|$

Důležité normy v $\mathbb{R}^N$:



$\|x\|_1 = |x_1|+|x_2|+\dots|x_N|$

$\|x\|_2 = \sqrt[2]{|x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_N|^2}$, udává (

$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p+|x_2|^p+\dots+|x_N|^p}$, $p\geq 1$

$\|x\|_\infty = \max_{i=1..N} |x_i|$

a příslušné ... značíme $B_1, B_2, \dots, B_\infty$

(pozn.: l^p prostor = posloupnosti splňující $\|\{a_n\}\|_p<\infty$)
a různé normy určují různé prostory $\sum \frac{1}{n} \in l_2 \setminus l_1$

Def: (P,ν), (P,μ) NLP. ν a μ jsou ekvivalentní, jestliže $\exists\, \alpha,\beta>0$:
$\alpha\nu(x)\leq\mu(x)\leq\beta\nu(x)\quad \forall x\in P$.

Věta: Všechny normy na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru jsou ekvivalentní.

Dk: Kopáček

Pro ∞-dim. prostor $\{a_n\}_1^\infty=\{1\}_1^\infty$, pak $\|\{a_n\}\|_\infty=1$, $\|\{a_n\}\|_1=\|\{a_n\}\|_2=\infty$

nejlepší:

Def: Vektorový prostor se skalárním součinem $(\cdot,\cdot): P\times P\to\mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ splňujícím:

(i) $(x,x)\geq 0$ a $(x,x)=0 \iff x=0$

(ii) $(x,y)=\overline{(y,x)}$

(iii) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$ a $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ {pozn.: (ii)+(iii): $(x,\lambda y)=\bar\lambda(x,y)$}

Sem Schwarze, opakování, pozor ve „značení“

Tvrzení: $\|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}$ definuje normu.

Dk: (i) ok, (ii) $(\alpha x,\alpha x)=\alpha\bar\alpha(x,x)$, (iii) $\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=\|x\|^2+\|y\|^2+\underbrace{2(x,y)}_{\substack{\leq 2\|x\|\|y\| \\ \text{Schwarz}}}\leq(\|x\|+\|y\|)^2$

Příklady: $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$ v $\mathbb{R}^n$ vede na Eukleidovskou normu

$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$

komplexní případ je složitější,

$(x,y)=x_1\bar y_1+x_2\bar y_2+\dots+x_n\bar y_n$

Věta (Schwarzova nerovnost): $\forall x, y \in P$ prostor se skalárním součinem platí
$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$
(reálný případ)
Dk: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $0 \leq (x-\lambda y, x-\lambda y) = \|x\|^2 - 2\lambda(x,y) + \lambda^2 \|y\|^2$, což je polynom 2. stupně s diskriminantem ≤ 0, ale ten je: $4(x,y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$. □

Zajímavá vlastnost:

Je-li P prostor se skal. součinem a $\|x\| = (x,x)^{1/2}$, pak platí rovnoběžníkové pravidlo $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
Naopak, splňuje-li norma rovnoběžníkové pravidlo, lze na P zavést skalární součin $(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ {v komplexním případě složitější}

Úplné metrické prostory

Def: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (P,\varrho)$, $x \in P$. Pak $x_n \xrightarrow{\varrho} x \overset{def}{\iff} \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$

Příklady: $(P,\varrho) = (\mathbb{R}$, absolutní hodnota$)$ $\Rightarrow$ $x_n \xrightarrow{\varrho} x \iff x_n \to x$ ve smyslu 1. semestru
$\chi_{(0,\frac{1}{n})} \xrightarrow{L^1} 0$, ale $\not\to$ v max normě, obvykle $\frac{1}{n}$ na $(-\infty, \infty)$

Věta: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup x \subset \mathbb{R}^N$. Pak $x_n \xrightarrow{\varrho_1} x \iff x_n \xrightarrow{\varrho_2} x \iff x_n \xrightarrow{\varrho_\infty} x \iff$ konverguje po složkách.

Dk: První dvě ekvivalence jsou snadnou aplikací věty o ekvivalenci norem a věty o dvou policajtech.
dále, zřejmě $x_n \xrightarrow{\varrho_\infty} x \iff x_n^i \to x^i$ (po složkách) $\forall i = 1..N$ □

Pozn: Protože tedy v $\mathbb{R}^N$ nezáleží na volbě normy, budeme psát $x_n \to x$.

Def: $\{x_n\}$ je Cauchyovská posloupnost v (P,ϱ), jestliže
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, k \geq n_0 \;\; \varrho(x_m, x_k) < \varepsilon.$$
$\Rightarrow$ Cauch. je omez.: $\varepsilon := 1$, $\delta := \max(1, \varrho(x_{n_0}, x_1), \ldots, \varrho(x_{n_0}, x_{n_0-1})) \Rightarrow \{x_n\} \subset U_\delta(x_{n_0})$

Pozn: v $\mathbb{R}^N$ je posl. Cauchyovská $\iff$ jsou Cauchyovské posl. jednotlivých složek.

Def: (P,ρ) je <u>úplný</u> metrický prostor, jestliže každá cauchyovská posl. je konvergentní.

Př: $(\mathbb{R},|\cdot|)$ je úplný, viz. B-C podmínka.
$(\mathbb{Q},|\cdot|)$ není úplný, $\exists x_n \in \mathbb{Q};\ x_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Věta: Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.
A v $\mathbb{R}^N$ to platí i obráceně.

Dk: "$\Rightarrow$": $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x)=0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0: \rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall k,l \geq n_0: \rho(x_k,x_l) \leq \rho(x_k,x)+\rho(x_l,x) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

"$\Leftarrow$": x^n cauchyovská v $\mathbb{R}^N \Rightarrow$ složky cauchyovské v $\mathbb{R} \overset{B-C}{\Rightarrow}$ složky konvergentní $\square$

Pozn: úplný metrický prostor ... Banachův
úplný metrický vektorový prostor ... Fréchetův
úplný metrický prostor se skalárním součinem ... Hilbertův

<u>BANACHŮV PRINCIP KONTRAKCE</u> (Banachova věta o pevném bodě)

Def: $A:(P,\rho)\to(P,\rho)$ je <u>kontraktivní</u>, jestliže $\exists \alpha\in(0,1)\ \forall x,y\in P$:
$$\rho(Ax,Ay)\leq \alpha\,\rho(x,y).$$
$x\in P$ je <u>pevný bod</u>, jestliže $Ax=x$.

Věta (BPK): Nechť (P,ρ) je Banachův a $A:P\to P$ je kontrakce.
Pak $\exists!$ pevný bod.

Dk: Volme $x_0\in P$ libovolné a definujme posloupnost $x_{n+1}=Ax_n$, ukážeme
(i) x_n je cauchyovská, tedy konvergentní k nějakému $x\in P$
(ii) x je pevný bod
(iii) y je pevný bod $\Rightarrow y=x$

Důkaz Banachova principu kontrakce:

(i) $\varrho(x_{n+k}, x_n) \leq \varrho(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \varrho(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \dots + \varrho(x_{n+1}, x_n)$

$$\leq \varrho(x_1, x_0)\left[\alpha^{n+k-1} + \alpha^{n+k-2} + \dots + \alpha^n\right]$$

$$= \varrho(x_1, x_0)\, \alpha^n \frac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha} = \text{nez.} \geq 0. \text{ nez} \to 0,$$

$\Rightarrow$ úplnost: $\exists x,\ x_n \xrightarrow{\varrho} x.$

(ii) $0 \leq \varrho(Ax, x) \leq \varrho(Ax, x^{n+1}) + \varrho(x^{n+1}, x) = \varrho(Ax, Ax^n) + \varrho(x^{n+1}, x)$

$$\leq \alpha\varrho(x, x^n) + \varrho(x^{n+1}, x) \to 0$$

$\Rightarrow \varrho(Ax, x) = 0 \Leftrightarrow Ax = x$

(iii) $Ax = x,\ Ay = A \Rightarrow \varrho(x, y) = \varrho(Ax, Ay) \leq \alpha\varrho(x, y) \overset{\alpha\in(0,1)}{\Longrightarrow} \varrho(x, y) = 0$ □

Def: $U_\delta(x) = \{y \in P : \varrho(x, y) < \delta\}$

$U_\delta^*(x) = U_\delta(x) \setminus \{x\}$

G je <u>otevřená</u>, jestliže $\forall x \in G\ \exists \delta > 0: U_\delta(x) \subset G$ Př: $\mathbb{R}, \emptyset, (0,1), \mathbb{R}\setminus\{6\}$

F je <u>uzavřená</u>, jestliže $P \setminus F$ je otevřená Př: $\mathbb{R}, \emptyset, \{1,3\}, [0,\infty)$

O je <u>obojetná</u>, jestliže je otevřená i uzavřená současně obvykle v diskrétní metrice jsou i další ot. množiny...

Vnitřek: $\operatorname{Int} A = A^\circ$ největší G ot. splňující $G \subset A$ Př: $\operatorname{Int}[0,1] = \operatorname{Int}(0,1) = (0,1)$, $\operatorname{Int}\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \emptyset$, $\operatorname{Int}\mathbb{Q} = \emptyset$

Uzávěr: $\overline{A}$ nejmenší F uz. splňující $A \subset F$ Př: $\overline{[0,1]} = \overline{(0,1)} = [0,1]$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$

Hranice: ∂A $\overline{A} \setminus A^\circ$ Př: $\partial\mathbb{R} = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Věta: (Vlastnosti systému ot. množin): (P, ϱ) m.p., pak $\tau = \{G \subset P, G \text{ ot}\}$ splňuje

(i) $\emptyset, P \in \tau$

(ii) $G_1, G_2 \dots G_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$ uzavřenost na konečné průniky

(iii) $G_\alpha \in \tau, \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha \in \tau$ uzavřenost na libovolné (i nespočetné) sjednocení

Dk vlastností systému ot. množin:

(i) triviálně z definice

(ii) $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i \Rightarrow \forall i=1..n\ x \in G_i \overset{G_i \text{ ot.}}{\Rightarrow} \exists \delta_i>0: U_{\delta_i}(x_i) \subset G_i$

položme $\delta = \min_{i=1..n} \delta_i$, pak $U_\delta(x_i) \subset G_i\ \forall i \Rightarrow U_\delta(x_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i$

(iii) $x \in \bigcup_{\alpha \in a} G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha \in \alpha : x \in G_\alpha \overset{G_\alpha \text{ ot.}}{\Rightarrow} \exists \delta: U_\delta(x) \subset G_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in \alpha} G_\alpha$. □

Př: $G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ot, ale $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$ uz

Věta (vlastnosti systému uz. množin) (P,ρ) m.p., $\mathcal{F} = \{F \subset P,\ F \text{ uz}\}$ splňuje

(i) $P, \emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $F_\alpha \in \mathcal{F},\ \forall \alpha \in \alpha \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \alpha} F_\alpha \in \mathcal{F}$ průnik lib. systému (i nespoč.) je uz.

(iii) $F_1, \dots F_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$

Dk: v podobném duchu jako výše, cvičení

Př: $[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ uz, ale $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] = (0,1)$ ot.

pozn: $A^\circ = \bigcup_{G_\alpha \text{ ot} \subset A} G_\alpha$, $\bar{A} = \bigcap_{F_\alpha \text{ uz} \supset A} F_\alpha$, A ot $\Leftrightarrow A^\circ = A$, A uz $\Leftrightarrow \bar{A} = A$

Tvrzení: (charakterizace ∂A). $\forall A \subset (P,\rho)$ $x \in \partial A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$ $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap (P \setminus A)$.

Dk: "$\Rightarrow$" pokud $\exists \varepsilon>0: U_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow U_\varepsilon(x) \text{ ot} \subset P \setminus A \Rightarrow U_\varepsilon(x) \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow x \notin \bar{A} \Rightarrow x \notin \partial A$

pokud $\exists \varepsilon>0: U_\varepsilon(x) \cap (P \setminus A) = \emptyset \Rightarrow U_\varepsilon(x) \text{ ot} \subset A \Rightarrow U_\varepsilon(x) \subset A^\circ \Rightarrow x \notin \partial A$

"$\Leftarrow$" $x \notin \partial A \Rightarrow x \notin \bar{A} \setminus A^\circ \Rightarrow x \in P \setminus \bar{A} \cup A^\circ$ což je otevřená množina. □

Věta: $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset A: x_n \to x$

Dk: "$\Rightarrow$" $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \in A^\circ \cup \partial A$. Pokud $x \in A$, triviálně položme $x_n = x$

Pokud $x \in \partial A$, použijeme tvrzení pro $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ a získáme $x_n \to x$

"$\Leftarrow$" $x \notin \bar{A} \Leftrightarrow x \in (P \setminus A)^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon>0: \forall y \in A\ \rho(x,y) \geq \varepsilon$. □

Věta: (Charakterizace uzavřených množin)

A je uz. $\iff A = \bar{A} \iff \partial A \subset A \iff (x_n \to x, x_n \in A \Rightarrow x \in A)$

Pozn.: $(0,1]$ je uz. v $(0,\infty)$!
$\{\frac{1}{n}\}$ Cauch., může zde chybět úplnost

Dk: první implikace už víme

druhá plyne triviálně z definice hranice (vždy $\partial A \subset \bar{A}$)

třetí implikace: "$\Leftarrow$" $x_n \to x, x_n \in A \underset{\text{věta}}{\overset{\text{minulá}}{\Rightarrow}} x \in \bar{A}$ ~~$\Rightarrow$ předpoklad~~

zvolme $x \in \bar{A}$, pak předpoklad + minulá věta $\Rightarrow x \in A \Rightarrow A = \bar{A}$

"$\Rightarrow$" Nechť $x_n \to x, x_n \in A \Rightarrow x \notin (P \setminus \bar{A})^{\circ} \iff x \in \bar{A} = A$ $\square$

Dodatky (důkazy na cvičení):

další vlastnosti uzávěru: $\bar{\emptyset} = \emptyset$, $M \subset N \Rightarrow \bar{M} \subset \bar{N}$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$, $\overline{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}$, $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$, $M \subset \bar{M}$

vlastnosti hranice: $\partial A = \bar{A} \cap \overline{P \setminus A}$ (tedy ∂A je uz.)

vlastnosti vnitřku: $A^{\circ} = A \setminus \overline{P \setminus A}$, $M^{\circ} \cap N^{\circ} = (M \cap N)^{\circ}$

Def: derivace množiny (množina hromadných bodů)

$$A' = \{x \in P : \exists \{x_n\} \text{ prosté} \subset A, x_n \to x\}$$

Vlastnosti: A' uz., $\emptyset' = \emptyset$, $M \subset N \Rightarrow M' \subset N'$, $(M \cup N)' = M' \cup N'$, $\bar{M} = M' \cup M$

obecně $P' \neq P$, $A'' \neq A'$

Spojitost a limity

Def.: $f:(P,\rho) \to (Q,\sigma)$

f je spojitá v $\alpha \in P \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : y \in U_\delta(\alpha) \Rightarrow f(y) \in U_\varepsilon(f(\alpha))$ (tj. $f(U_\delta(\alpha)) \subset U_\varepsilon(f(\alpha))$)

je-li A ot. $\subset (P,\rho)$, pak f je spoj. v $A \overset{def}{\iff} \forall \alpha \in A$ f je spoj. v α

Spojitost vzhledem k množině:

f je spojitá v α vzhledem k A $(A \subset P, \alpha \in A, f: A \to (Q,\sigma))$

$\overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad f(U_\delta(\alpha) \cap A) \subset U_\varepsilon(f(\alpha))$

př: Dirichletova fce není spojitá v žádném bodě $\mathbb{Q}$, ale vzhledem k $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{Q}$ spojitá je.

pozn: f je spojitá v $a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Věta o spojitosti složeného zobrazení:

$f:(P,\rho) \to (Q,\sigma)$ spojitá v $b \in P$

$g:(M,\nu) \to (P,\rho)$ spojitá v $a \in M$, $b = g(a)$

$\Rightarrow f \circ g : (M,\nu) \to (Q,\sigma)$ spoj. v a.

Dk: Chceme $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in U_\delta(a) \Rightarrow f(g(x)) \in U_\varepsilon(f(g(x)))$.

K $\varepsilon > 0 \ \exists \Delta > 0 : y \in U_\Delta(b) \Rightarrow f(y) \in U_\varepsilon(f(b))$.

K $\Delta > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in U_\delta(a) \Rightarrow g(x) \in U_\varepsilon(b)$ a je to $\square$

Stejně snadno lze dokázat obě verze věty o limitě složené fce:

Věta: $f:(P,\rho) \to (Q,\sigma)$, $g:(M,\nu) \to (P,\rho)$, $\lim_{x \to a} g(x) = b$, $\lim_{y \to b} f(y) = A$ a

buď f je spoj. v a, nebo $\exists \delta > 0 : \forall x \in U^*_\delta(a) : f(x) \neq A$.

Pak $\lim_{x \to a} f(g(x)) = A$.

~~a / $\exists \delta$ / ... (Q,σ)~~

Používáme-li na $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^N$ dříve uvedených norem, získáme pro funkce z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ snadnou modifikací v důkazech z prvního semestru věty:

V: Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Pak $\lim_{x\to a} \|f(x)\| = \|A\|$, $\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = A+B$, $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = A.B$, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud $B\neq 0$ a RHS mají smysl.

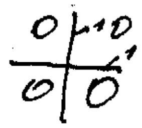
pozn: nevlastní limity ani nemohou, mají-li RHS smysl, limity v nevlastních bodech, protože nevlastní body jsme v $\mathbb{R}^N$ a metrických prostorech nedefinovali.

V: Jsou-li f, g spoj v $x\in\mathbb{R}^N$, pak i $|f|$, $f+g$, $f.g$ a $\frac{f}{g}$ (pokud $g(x)\neq 0$) spoj.

z definice a limity ihned snadno plyne (v důkazech použije maximovou normu):

V: $f(x): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spoj v $a = (a_1, a_2 \dots a_N)$. Pak i $\tilde{f}: [x_2, x_3, \dots x_N] \to f(a_1, x_2, x_3 \dots x_N)$ a pod. je spoj v $[a_2, a_3, \dots a_N]$.

podobně pro limitu.

POZOR: Obrácení to neplatí! 

Př: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, ř: $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}$, vsuvka: $\frac{r\cos\varphi\, r\sin\varphi}{r^2} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$

navíc $f(x,y) = x \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$ tedy $\searrow 0 \cdot$ omez $= \searrow 0$

Př: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ neex, neboť $f(0,y) = 0$, $f(x,x) = \frac{1}{2}$ tedy porušena B-C.

Metoda:

existence limity: uniformní odhady + věty o existenci a aritmetice limit a pod.

neexistence limity: dvě trajektorie

Př: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} = 0$, neboť $\left|\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^4}{x^2+y^2}\right| \le |x| \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| + |y|^2 \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|$

vidět v tom maximovou normu!

Př: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ neex: $f(0,y) = 0$
$f(x,0) = 0$
$f(x,kx) = \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} \to 0$ ale $f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$

Další věty „zadarmo":

Heine (i) $\lim_{x\to a} f(x) = A \iff (\forall \{x_n\}, x_n \to a, x_n \neq a$ platí $f(x_n) \to A)$

(ii) f je spojitá v $A \iff (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a))$

a B-C:

$\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x_1, x_2 \in U^*_\delta(a) \Rightarrow \| f(x_1) - f(x_2) \| < \varepsilon$

Další vlastnosti spojitých zobrazení v metrických prostorech

Věta (vzor otevřené množiny při spojitém zobrazení je otevřená množina)

$f: (P,\rho) \to (Q,\sigma)$ spojité $\iff$ Je-li $A \subset Q$ ot v (Q,σ) pak i $f^{-1}(A)$ je ot v (P,ρ).

$(f^{-1}(A) = \{x \in P : f(x) \in A\})$.

Dk: "$\Rightarrow$" pokud $f^{-1}(A) = \emptyset$ triv

pokud $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ máme: $x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \in A \overset{A \text{ ot}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(f(x)) \subset A \overset{\text{spojitost}}{\Rightarrow}$

$\overset{\text{spojitost}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x)) \subset A$. To pro $\forall x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A)$ ot.

"$\Leftarrow$" $\forall x \in P \; \forall \varepsilon > 0$ je $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$ ot, tedy $\exists \delta > 0 \; U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$

a tedy $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$ □

pozn: platí podobná věta „vzor uzavřené je a zavřená při spoj zobraz",

díky tomu, že $Df = P$ a tedy vzor doplňku je doplněk vzoru.

pozn: Věty neplatí pro Obraz!

$\mathbb{R}$ uz, $f = \operatorname{arctg} x$ spoj, $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ot.

$\mathbb{R}$ uz, $f(x) = \sin x$ spoj, $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ uz.

Nové metody určování otevřenosti a uzavřenosti množin:

Př: $M = \{(x,y) : x^2 + \sin xy < 0\}$. Položme $f(x,y) = x^2 + \sin xy$, $A = (-\infty, 0)$, pak f spoj a A ot.

Tedy $M = f^{-1}(A)$ ot. (jednodušší zvolená fce a dobře zvolená množina

usnadní z otevřenosti, špatná volba otevřenost nezaručí, neříká nic.)

Př: $\mathbb{R} = \sin^{-1}([-1,1])$ tedy uz, ale je i ot.

Př: (pozor na odhad uzavřenosti): $A = \{x : \ln^2 x \geq 0\} = (0, \infty)$ ot, ne uz,

třeba ze neostrá nerovnost.

Kompaktní množiny

Df: $A \subset (P,\varrho)$ je **kompaktní**, jestliže z každé $\{x_n\} \subset A$ lze vybrat $\{x_{n_k}\}: x_{n_k} \to x \in A$.
$A \subset (P,\varrho)$ omezená, jestl. $\exists x_0 \in P, K > 0: A \subset U_K(x_0)$.

Př: $[0,1]$ je komp. Weierstrass, $(0,1)$ není, neboť $\frac{1}{n} \searrow 0 \notin A$, $[0,\infty)$ není, neboť $x_n = n$

Věta: Nechť A je komp. $\Rightarrow$ A je omezená a uzavřená.

Dk: A není uz. $\Rightarrow \exists x \in \bar{A} \setminus A$ a dle charakterizace uzávěru $\exists \{x_n\} \subset A, x_n \to x$,
tedy A není komp.
A není omez $\Rightarrow$ pro pevně zvolené $x_0 \in P$ $\exists x_n \in A: \varrho(x_0, x_n) > n$.
$\Rightarrow \{x_n\}$ není omez. $\Rightarrow$ žádná vybraná není omez $\Rightarrow$ nemůže být Cauch. □

Věta: V $\mathbb{R}^N$: A om + uz $\Rightarrow$ A kompakt $\quad$ (A om v $\mathbb{R}^N$: $\exists r > 0: A \subset U_r(0)$)

Dk: $N = 1$: Weierstrass
$N > 1$: A om, $\{x_n\} \subset A$. Pak $\{x_n\}$ om, speciálně první složky
tedy Weierstrass: $\exists \{x_{n_k}\}: x_{n_k}^1 \to x^1 \in \mathbb{R}$
podobně vybírám už z vybraných pro další složky, dostanu
N-krát vybranou posl. $\{x_l\}$ splňující:
$x_l^1 \to x^1 \in \mathbb{R}, x_l^2 \to x^2 \in \mathbb{R}, \ldots, x_l^N \to x^N \in \mathbb{R}$. Tedy věta o vztahu
konvergence v normě v $\mathbb{R}^N$ a konvergence po složkách dává
$x_l \to x = [x^1, x^2, \ldots, x^N] \in \mathbb{R}^N$. Ale $x_l \in A$, A uz $\Rightarrow x \in A$ □

pozn: neplatí to obecně v nekonečné dimenzi:
Uvaž $l_2 = \{$všechny posloupnosti splňující $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\}$, $\varrho(\{a_n\},\{b_n\}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$,
$A = U_1(\{0\})$ a polož $x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots)$ {posloupnost posloupností}
pak žádná vybraná není Cauch, neboť $\varrho(x_n, x_m) = \sqrt{2}$ $\forall n \neq m$.

Věta: $A \subset (P,\varrho)$, A komp., $f: A \to (Q,\sigma)$ spoj. Pak $f(A)$ je komp.

Dk: zvolme $y_n \in f(A)$, pak $\exists x_n \in A: f(x_n) = y_n$, ale A komp. $\Rightarrow \exists x_{n_k} \to x \in A$.
f spoj $\Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x)$ tj $\exists y_{n_k} \to f(x) \in f(A)$ □

Důsledek: $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ spoj, A komp. $\Rightarrow$ funkce nabývá na A maxima i minima.
Dk: $f(A)$ komp, tj om+uz, tj $\sup f(A), \inf f(A) \in \mathbb{R}$ z omez, tedy $\in f(A)$ z uz.

Další vlastnosti kompaktních množin

<u>Věta (Cantor):</u> $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ neprázdné kompakty. Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

Dk: Zvolme $x_n \in K_n$. K_1 kpt $\Rightarrow$ ex $x_{n_k} \to x \in K_1$. Pro lib. n všechny od jistého indexu všechny členy posloupnosti leží v K_n. Komp je uz $\Rightarrow x \in K_n \ \forall n$
$\Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ □

<u>Tvrzení:</u> K komp, F uz $\Rightarrow K \cap F$ uz.

Dk: zvolme $\{x_n\} \subset K \cap F$. K komp $\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}, x_{n_k} \to x \in K$
ale $x_{n_k} \in K \cap F$ uz $\Rightarrow x \in K \cap F$ □

<u>Def:</u> $A \subset P$ je <u>hustá</u> $\overset{def}{\iff} \overline{A} = P$ např. $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$

pozn: $A \subset B \subset C$: A hustá v $C \Rightarrow A$ hustá v B a B hustá v C
A hustá v B, B hustá v $C \Rightarrow A$ hustá v C cvičení s definicí uzávěru

Def: $A \subset P$ <u>řídká</u> $\overset{def}{\iff} P \setminus \overline{A}$ je hustá (tj. je podmnožina něčeho, jehož doplněk hustý)

M je <u>separabilní</u> $\overset{def}{\iff} \exists$ spočetná hustá $A \subset M$ ($\mathbb{Q}$ spoč. $\Rightarrow \mathbb{R}$ separabilní, podobně $\mathbb{R}^n$)

<u>Tvrzení:</u> $M \subset (P, \rho)$, P separabilní $\Rightarrow M$ separabilní

Dk: M separabilní $\Rightarrow \exists \{x_n\}$ hustá v M. Označme $\Omega_{n,m} = U_{\frac{1}{m}}(x_n)$.
$\forall n,m \in \mathbb{N}$ volme $y_{n,m} \in M \cap \Omega_{n,m}$ je-li neprázdný, jinak nedefinujeme.
Zřejmě $B = \{y_{n,m}\}$ je spoč., ukážeme hustá:
Zvolme $x \in B$, chceme $\rho(x, B) = 0$ (tj. $\inf \rho(x,y), y \in B$). Volme lib. $m \in \mathbb{N}$.
$\{x_n\}$ hustá $\Rightarrow \exists n_m : x \in \Omega_{n_m, m} \Rightarrow M \cap \Omega_{n_m,m} \neq \emptyset \Rightarrow \rho(x, y_{n_m m}) \leq \rho(x, x_{n_m}) + \rho(x_{n_m}, y_{n_m})$
$\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$ □

<u>Věta:</u> Kompaktní prostor je úplný, omezený, separabilní.

Dk: omez: víme; úplný: vezmeme cauch. $\overset{komp.}{\Rightarrow} \exists$ vybraná konvergentní
$\exists n_0 : n,m \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\exists n_1 : n_k \geq n_1 \ \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$
tedy $n \geq \max(n_0, n_1)$: $\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$

~~separ: pokrytí ... (x_n) ...~~

Důkaz separability komp. prostoru:

Krok 1: $\forall \varepsilon>0\ \exists$ konečná množina $K(\varepsilon)$: $\rho(x,K(\varepsilon))<\varepsilon\ \forall x\in K$:

Pokud ne, vytvoříme $\{x_n\}$, $\rho(x_n, K)\geq \frac{\varepsilon}{2}$ posloupnost a z K nelze vybrat cauch.

Krok 2: $A = K(1)\cup K(\frac{1}{2})\cup K(\frac{1}{3})\cup\ldots$ je zřejmě spočetná, hustá □

Lindelöfova pokrývací věta

M separabilní $\subset (P,\rho)$, $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \supset M$, G_α ot. Pak $\exists$ spočetná $\beta\subset\alpha$: $\bigcup_{\alpha\in\beta} G_\alpha\supset M$.

Dk: M separabilní $\Rightarrow \exists \{x_m\}$ hustá $\Rightarrow \Omega_{m,n} = U_{\frac{1}{n}}(x_m)$ pokrývají M.

Krok 1: $\forall x\in M\ \exists \alpha\in A$ a $m,n\in\mathbb{N}$: $x\in\Omega_{m,n}\subset G_\alpha$ (vezmu $\Omega^x=\Omega_{m,n}$ pro toto x):

$\exists\alpha\in A$: $x\in G_\alpha$ a $\exists n\in\mathbb{N}$: $U_{\frac{2}{n}}(x)\subset G_\alpha$, neboť systém G_α pokrývá a G_α ot.

stačí tedy najít $x_m\in U_{\frac{1}{n}}(x)$, díky hustotě a Δ-nerovnosti $\Omega_{m,n}\subset G_\alpha$.

Krok 2: provedeme-li Krok 1 pro všechna $x\in M$, pak systém $\{\Omega^x, x\in M\}$ je podsystém původního spočetného systému $\Omega_{m,n}$ a pokrývá M.

Pro každou množinu z tohoto systému tedy vezmeme jednu G_α z naší spoč. □

Borelova pokrývací věta

K kompaktní $\subset (P,\rho)$, G_α ot, $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha\supset K$. Pak $\exists$ konečné pokrytí vybrané z G_α.

Dk: Kompakt je separabilní $\overset{\text{Lindelöf}}{\Rightarrow}$ můžeme vybrat spočetné pokrytí

Mějme tedy G_n ot, $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\supset K$. Definujme $H_1=G_1$, $H_2=G_1\cup G_2$ atd.

Pak $H_1\subset H_2\subset\ldots$ a systém $\{H_n\}$ pokrývá K. Navíc $K_n = K-H_n$ je komp a $K_1\supset K_2\supset\ldots$

a $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n=\emptyset \overset{\text{Cantor}}{\Rightarrow} \exists n_0\in\mathbb{N}$: $K_n=\emptyset\ \forall n>n_0 \Rightarrow M\subset H_1\cup\ldots\cup H_{n_0} = G_1\cup\ldots\cup G_{n_0}$ □

Tvrzení: A ot $\subset\mathbb{R}^N \Rightarrow \exists$ spočetná množ. intervalů pokrývajících A

Dk: A ot $\Leftrightarrow A$ ot v maximové normě, def ot + Lindelöf dokončí □

pozn. lze i pro koule

Pozn.: Charakterizace kompaktnosti

K kompaktní (z každé posl. lze vybrat konvergentní podposl.)

$\Updownarrow$

prostor K je úplný a

totálně omezený (z každé posl. lze vybrat cauch.) $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ \varepsilon$-síť v K $(\exists A(\varepsilon)\subset K: \forall x\in K\ \exists a\in A(\varepsilon): \rho(x,a)<\varepsilon)$

$\Updownarrow$

z každého ot pokrytí lze vybrat konečné

Def.: $f:(P,\rho)\to(Q,\sigma)$ je stejnoměrně spojitá na $A\subset P$

$$\overset{df}{\iff} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: x,y\in A,\ \rho(x,y)<\delta \Rightarrow \sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$$

Věta (Cantor): $f:(P,\rho)\to(Q,\sigma)$ spoj. na $K\subset P$. Pak f je stejnoměrně spojitá na K.

Dk (stejně jako v 1. semestru):

Sporem: $\exists \varepsilon>0: \forall \delta_n=\frac{1}{n}\ \exists x_n,y_n\in K: \sigma(f(x_n),f(y_n))\geq\varepsilon$ byť $\rho(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$

K kompaktní: $\exists \{x_{n_k}\}$ vybraná, $x_{n_k}\to x\in K$, ale viz. výše i $y_{n_k}\to x$.

Spojitost: $f(x_{n_k})\to x \leftarrow f(y_{n_k})$ ↯ □

DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

PARCIÁLNÍ DERIVACE A TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL

Def: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, parciální derivace dle i-té proměnné:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\dots x_{i-1},x_i+t,x_{i+1},\dots x_n)-f(x)}{t}$$ pokud ex. vlastní

pozn: zafixováním všech proměnných až na jednu jsme vlastně získali funkci jedné proměnné a můžeme aplikovat veškeré znalosti z prvního semestru.

pozn: zjednodušený zápis: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+te_i)-f(x)}{t}$, kde $e_i=(0\dots0,1,0\dots0)$ na i-tém místě

Def: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(x)$ pokud příslušné limity existují vlastní.

To můžeme učinit, neboť $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\in\mathbb{R}$ pokud existuje vlastní, tedy $\frac{\partial f}{\partial x_i}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, situace tedy jako výše.

Př: $\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=2x$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\sin xy)=\frac{\partial}{\partial y}(y\cdot\cos xy)=\cos xy+xy(-\sin xy)$$

Def: $\nabla f:=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ gradient

pozn: pro $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ je $\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$ matice

Def: Derivace ve směru: $v\in\mathbb{R}^n, x\in\mathbb{R}^n\dots\ \frac{\partial f}{\partial v}(x)=\lim_{t\to0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$

Př: $v=(1,1)$, $w=(2,0)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$, $f(x,y)=x^2+y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=2x_0=2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=2y_0=2$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)=\lim_{t\to0}\frac{f(1+t,1+t)-f(1,1)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2+4t+2t^2-2}{t}=4$

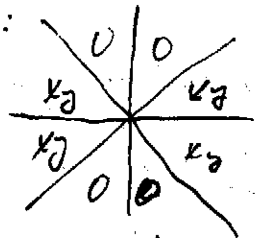
$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0,y_0)=\lim_{t\to0}\frac{f(1+2t,1)-f(1,1)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1+4t+4t^2+1-1-1}{t}=4=2\frac{\partial f}{\partial x}$!

Parciální derivace je speciálním případem derivace ve směru, u ní ale hraje roli i délka vektoru!

obecně: $\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v$ NE VŽDY

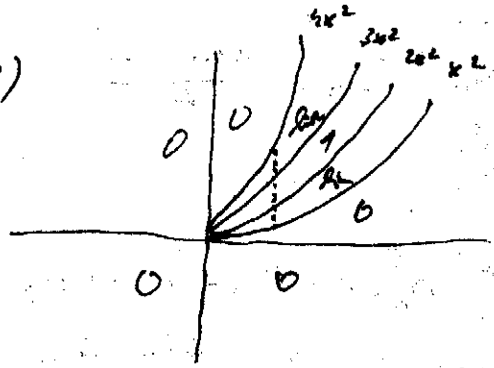
Př: $f(x,y) = e^{-\sqrt{|xy|}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, ale $\frac{\partial f}{\partial (1,1)} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-|t|}-1}{t}$ neex.

obecně: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ NE VŽDY

Př: 

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \neq 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

obecně: vztah spojitosti v bodě a existence všech parciálních derivací v bodě OBECNĚ ŽÁDNÝ

Př: 1) $f(x) = |x|$ v 0. 2) 

změť nespojitá, ač $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 \ \forall v, f(0,0)$!

Totální diferenciál

pozn: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exists f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} = A \iff \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)-A\cdot t}{t} = 0$

Pojem derivace se obecně chápe jako existence tečny s jistými aproximačními vlastnostmi, druhý vzoreček poukazuje na existenci lin. zobrazení, které dobře aproximuje.

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v $x \in \mathbb{R}^n$ TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL, pokud $\exists A \in \mathbb{R}^n$ a $\eta: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ splňující $f(x+h) - f(x) = A\cdot h + \eta(h)$, kde $\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\eta(h)}{\|h\|} = 0$. (tj. $\eta(h) = o(\|h\|)$, $\|h\| \to 0$)

Totálním diferenciálem nazveme zobrazení $h \to Ah$ (lineární), ozn. $df(x)$

pozn: f má TD $= A.h \iff \lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-Ah}{\|h\|} = 0$

Věta: Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má TD v $x \in \mathbb{R}^n$. Pak

(i) $\exists$ všechny parciální derivace v x a platí $A = \nabla f(x)$.

(ii) $\exists$ derivace ve všech směrech $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f \cdot v$

(iii) f je spoj. v x.

pozn: (i) zároveň říká, že jediným možným kandidátem na TD je $h \to \nabla f(x).h$!

Důkaz věty o TD:

(ii) $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} \overset{\text{hnatu}}{=} \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)-df(x)(h)}{|t|\,\|v\|}\cdot\frac{|t|\,\|v\|}{t} + \frac{df(x)(tv)}{t}\right)$

$= df(x)(v)$. Linearita $df(x)$ + $df(x)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Rightarrow df(x)(v) = \nabla f \cdot v$

(i) viz. výše, spec. případ (ii)

(iii) podobně jako u jedné

$$\lim_{h\to 0}\left(f(x+h)-f(x)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-df(x)(h)}{\|h\|}\cdot\|h\| + df(x)(h) = 0 \ \square$$

Př: $f(x,y) = x^2+y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-0h_1-0h_2}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\frac{h_1^2+h_2^2-0-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \quad \text{tedy } df(x) = 0$$

Př: $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-0h_1-0h_2}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h_1 h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \overset{\substack{h_1 = r\cos\varphi\\ h_2 = r\sin\varphi}}{=} \lim_{r\to 0}\frac{r^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\cos\varphi\sin\varphi}}{r} \not\to 0$$

<u>Věta</u>: Nechť f má v x spojité parc. derivace. Pak f má v x TD.

pozn.: $f \in C^1(\Omega)$, Ω ot. $\subset \mathbb{R}^n$, pokud f má spoj. parc. derivace v Ω.

Dk: $(N=2)$: $f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1,x_2) \overset{\text{přičti/odečti}}{=}$

$= f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1, x_2) + f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1,x_2)$

$\overset{\text{Lagrange}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_1+h_1, \xi_2)\cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, x_2)\cdot h_1$, kde $\xi_1 \in (x_1, x_1+h_1)$, $\xi_2 \in (x_2, x_2+h_2)$

$\overset{\text{přičti/odečti}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,x_2)h_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_1,x_2)h_1 + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_1+h_1,\xi_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,x_2)\right)\frac{h_2}{\|h\|} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1,x_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_1,x_2)\right)\frac{h_1}{\|h\|}\right]}_{*}\|h\|$

teď už stačí, aby $* \to 0$ s $\|h\|\to 0$, ale $\to 0 \cdot$ omez. + $\to 0 \cdot$ omez.
neboť $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ spoj. $\square$

Ještě k příkladům výše:

Př: $f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ spoj. $\Rightarrow \exists$ TD na $\mathbb{R}^2$

Př: $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{y}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$ spoj. mimo osový kříž,
tam nutno vyšetřit

Vš více: f má spoj. PD v x $\left(\lim_{x\to a} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ !\right)$

$\Downarrow$ $\not\Leftarrow$ *

f má TD v x $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f spoj v x

$\Downarrow$ $\not\Leftarrow$ ale v $\mathbb{R}^1$ ano

f má PD v x

$\left(\begin{array}{l} * \text{ Př. } f(x,y) = (x^2y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \ 0 \text{ pro } x^2+y^2=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ \text{a } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} \text{ neex.} \Rightarrow f \notin C^1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ \text{a } \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|h\|^2 \sin\frac{1}{\|h\|} - 0 - 0}{\|h\|} = 0 \end{array}\right)$

DODATKY:

poz. o záměnnosti derivací (Janík D1, D2)

Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má všechny PD až do k-tého řádu (včetně) spojité,

pak jsou záměnné.

Diferenciály vyšších řádů

Def: $f \in C^2(\Omega)$ {tj. 2. parc. derivace spojité}, pak

$$d^2 f_x(h) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, h_i h_j \quad \text{tedy bilineární zobrazení}$$

Podobně: $d^k f(x)(h)$ k-lineární zobrazení

Pozn: Jemný přístup: D2 (Janík)

(Fce má TD n-tého řádu $\Leftrightarrow$ PD $(n-1)$-tého řádu mají TD $\Leftrightarrow$ do $df(x)(h)$ dosadíme za h, dostaneme $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dále počítáme TD a dosazujeme za další h a nejde nic to n-krát)

Pozn: Ještě ke gradientu

Pokud $\exists\, df(x)$ pak $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x)\cdot v$

speciálně pro $\|v\|=1$: $\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x)\right| \leq \|\nabla f(x)\|\cdot\|v\| = \|\nabla f(x)\|$

pokud volíme $v = \pm\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$, pak $\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x)\right| = \|\nabla f(x)\|$

tedy funkce nejvíce roste a klesá ve směru gradientu

Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu

(*) $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ $M,N \in C^1(\Omega)$, Ω ot. $\subset \mathbb{R}^2$

chápeme jako: $M + y'N = 0$ (hledáme $y(x)$)

nebo

$Mx' + N = 0$ (hledáme $x(y)$)

Rovnice ve tvaru TD, pokud $\exists$ fce $V(x,y)$ splňující $M = \frac{\partial V}{\partial x}$, $N = \frac{\partial V}{\partial y}$

$V(x,y)$ se pak nazývá potenciál pole (M,N).

Nutnou podmínkou (vlastně i postačující) je tzv. podmínka exaktnosti:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{na } \Omega$$

Dk: Existuje-li $V(x,y) \in C^2(\Omega)$ splňující $M = \frac{\partial V}{\partial x}$, $N = \frac{\partial V}{\partial y}$, pak má záměnné derivace a tedy $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$ □

Př: $(5xy + 2y^2)x^3 + (x^5 + x^4 y)y' = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 5x^4 + 4x^3 y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 5x^4 + 4x^3 y$ tedy exaktní, hledejme $V(x,y)$:

$V(x,y) = \int 5x^4 y + 2y^2 x^3\,dx = x^5 y + \frac{1}{2}x^4 y^2 + C(y)$

$\frac{\partial V}{\partial y} = x^5 + x^4 y + C'(y) = N = x^5 + x^4 y \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = \text{konst}$

odtud $V(x,y) = x^5 y + \frac{1}{2}x^4 y^2 + d$, $d \in \mathbb{R}$

dořešení: TD $V(x,y) = 0 \iff V(x,y) = c$

v příkladu tedy $x^5 y + \frac{1}{2}x^4 y^2 = c$ a teď vyjádřit y

pozn: zabýváme se jen postupem, existenci a jednoznačnost dodá teorie obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu pokud (*) není exaktní, obecně <u>NEUMÍME</u> vyřešit.

Je sice známo tvrzení, že $M^2+N^2 \neq 0 \Rightarrow$ lze nalézt integrační faktor $p(x,y)$ takový, že $pM\,dx + pN\,dy = 0$ je exaktní, ale jeho tvar se nemusí uhodnout.

Kam až se dá dojít:

$$(pM)_y = (pN)_x$$

$$p_y M + pM_y = p_x N + pN_x$$ parciální diferenciální rovnice

Nádadní: $p(x,y) = p(z(x,y))$

kde např. $z(x,y) = x$ tj. p závisí na x

$z(x,y) = y$

$z(x,y) = x\cdot y$ p závisí na $x\cdot y$

$z(x,y) = x+y$ atd.

pak: $p_y = p'\cdot z_y$ a $p_x = p' z_x$

tedy:

$$p' z_y M + pM_y = p' z_x N + pN_x$$

$$\frac{p'}{p} = -\frac{M_y - N_x}{z_y M - z_x N}$$

sem nastřelujeme a chceme, aby RHS a LHS závisely na stejné fci $z(x,y)$.

Př: $xy^2\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$ hledejte I.F. záv. na $x+y$ nebo $x\cdot y$

$M_y - N_x = 2xy - (2xy - 1) = 1 \neq 0$ není exaktní

pokus $z(x,y) = x+y \Rightarrow z_x = z_y = 1$

dosadíme $\frac{p'}{p} = -\frac{1}{xy^2 - x^2y + x}$ nevypadá to moc jako fce $x+y$

pokus $z(x,y) = x\cdot y \Rightarrow z_x = y,\ z_y = x$

$$\frac{p'}{p} = -\frac{1}{x^2y^2 - x^2y^2 + xy} = -\frac{1}{xy},$$ což v podstatě odpovídá

dif. rovnici $\frac{p'(t)}{p(t)} = -\frac{1}{t}$

řešení $p(t) = \text{konst}\cdot\frac{1}{t}$, tedy $p(x,y) = \frac{1}{xy}$ a $y\,dx + (x - \frac{1}{y})\,dy$ je exaktní!

$V(x,y) = xy - \ln|y| \Rightarrow xy - \ln|y| = C \Rightarrow x = \frac{1}{y}(C - \ln|y|)$ + zkontrolovat $x=0,\ y=0$

Pozn: Řešíme-li lineární diferenciální rovnici 1. řádu a hledáme-li IF závislý na x, získáme stejný IF jako „starou" metodou integračního faktoru $\Rightarrow$ naše nová metoda je silnější!

Složení derivování – řetízkové pravidlo

pozn: budeme se zabývat složeným zobrazením $f(g(x))$, kde

$f: \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

g lze chápat jako $g = [g_1, g_2, \dots g_M]$, $g_i: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

a $dg(x) = [dg_1(x), dg_2(x), \dots dg_M(x)]$.

(tj $dg(x)(h) = [dg_1(x)(h), \dots\dots, dg_M(x)(h)]$)

tedy $dg_i(x): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $dg(x): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$.

Věta: Nechť $f: \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, g má TD v $a \in \mathbb{R}^N$, f má TD v $b = g(a) \in \mathbb{R}^M$. Pak $f(g(x))$ má TD v a a platí

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) \qquad \forall i = 1 \dots N$$

pozn: Tedy $d(f(g(x)))(a)(h) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) h_i$

Dk: existence TD f a g dává ve správných označeních hodně a vzorů (aplikace spojitosti g_j):

$f(b+h) - f(b) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) h_j + \eta(h) \|h\|$, kde η spoj v 0, $\eta(0) = 0$ (vzhledem ke vydělení $\|h\|$ a dodefinování 0)

$g_j(a+k) - g_j(a) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) k_i + \xi_j(k) \cdot \|k\|$, ξ_j spoj v 0, $\xi_j(0) = 0$

odkud

$(f \circ g)(a+k) - (f \circ g)(a) = f(g(a+k)) - f(g(a)) = f(g(a) + \overbrace{g(a+k) - g(a)}^{h}) - f(g(a))$

$= \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) (g_j(a+k) - g_j(a)) + \underbrace{\eta(g(a+k) - g(a)) \, \|g(a+k) - g(a)\|}_{\eta_1(k)}$

$= \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) k_i + \underbrace{\sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) \cdot \xi_j(k) \cdot \|k\|}_{\eta_2(k)} + \eta_1(k)$

zbývá: $\lim_{\|k\| \to 0} \frac{\eta_1(k)}{\|k\|} = \lim_{\|k\| \to 0} \frac{\eta_2(k)}{\|k\|} = 0$

$\frac{\eta_2(k)}{\|k\|} = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) \xi_j(k) = \sum \text{omez.} \to 0 = \to 0$

dále $\eta(g(a+k) - g(a)) \to 0$ (složení spojitých zobrazení)

a $\frac{\|g(a+k) - g(a)\|_\infty}{\|k\|_\infty} \le \max_j \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) \cdot k_i + \xi_j \|k\|\right)}{\|k\|} \le \max_j \frac{\sum \|\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)\| \cdot \|k\| + \|\xi_j(k)\| \cdot \|k\|}{\|k\|}$ omez.

Př: $F(x_1,x_2) = \operatorname{arctg} \sqrt{1+x_1^2+x_2^2}$

$f(z) = \operatorname{arctg} z \quad (f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^\infty)$

$g(x_1,x_2) = \sqrt{1+x_1^2+x_2^2} \quad (g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}) \qquad DF = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}, \frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}} \Rightarrow g \in C^1$$

Můžeme: $\frac{\partial F}{\partial x_1}(a_1,a_2) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(x_1,x_2)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1,a_2) = \frac{1}{2+a_1^2+a_2^2} \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}$

Př: $f(y_1,y_2,y_3) = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$, $g(x_1,x_2) = (x_1+x_2^2, x_1 \cdot x_2, x_1)$

(tj. zadat $g_1(x_1,x_2) = x_1+x_2^2$, $g_2(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2$, $g_3(x_1,x_2) = x_1$)

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ C^2-tř., $g_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2-tř., $D f\circ g = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f\circ g}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial y_1}(g(a)) \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial f}{\partial y_2}(g(a)) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial f}{\partial y_3}(g(a)) \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(a)$$

$$= a_1^2 a_2 \cdot 1 + (a_1+a_2^2) a_1 \cdot 1 + (a_1+a_2^2) a_1 a_2 \cdot 1$$

pozn: někdy trochu nepřesně: $\frac{\partial f\circ g}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1}$

Věta o střední hodnotě a Taylorův vzorec

Df: $A \subset \mathbb{R}^N$ je konvexní $\overset{def}{\iff} \forall x,y \in A\ \forall \lambda \in [0,1]: \lambda x + (1-\lambda) y \in M$

př.:  ANO  NE $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ konvexní $\iff$ nadgraf konvex.

Věta: $A \subset \mathbb{R}^N$ ot. konvex, $f \in C^1(A)$, $f:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Pak $\forall a,b \in A\ \exists \tau \in (0,1)$:

$$f(b)-f(a) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\tau(b-a))\cdot(b_i-a_i)$$

Dk: $F(t) := f(a+t(b-a))$, tedy $F = f\circ g$, kde $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, C^1, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$, C^∞

F podle věty o složení derivací má TD na $(0,1)$, tedy derivaci ($F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$).

Dále F je spojitá na $[0,1]$, tedy Lagrange: $\exists \tau\in(0,1)$: $F'(\tau) = F(1)-F(0)$.

Ale $$F'(\tau) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\tau(b-a))\,\frac{\partial g_i}{\partial t}(\tau) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\tau(b-a))\cdot(b_i-a_i).$$

$\quad \|$

$f(b)-f(a)$ $\square$

Věta: (Taylorův vzorec)

$A \subset \mathbb{R}^N$ ot. konvex., $f: A\to\mathbb{R}$, $f\in C^{m+1}(A)$, $a, a+h \in A$. Pak $\exists \tau\in(0,1)$:

$$f(a+h)-f(a) = \frac{1}{1!}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j + \frac{1}{2!}\sum_{j_1,j_2=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}}(a)h_{j_1}h_{j_2} + \dots + \frac{1}{m!}\sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{N}\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_m}}(a)h_{j_1}\dots h_{j_m} + R_{m+1}(a,h),$$

kde $$R_{m+1}(a,h) = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{j_1,\dots,j_{m+1}=1}^{N}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{m+1}}}(a+\tau h)\,h_{j_1}\dots h_{j_{m+1}}$$

Pozn: $f\in C^{m+1}(A) \Rightarrow$ všechny $(m+1)$. PD jsou spojité, navíc úsečka $\{a+\tau h,\ \tau\in[0,1]\}$ je kompakt $\Rightarrow$ tyto derivace jsou omezené $\Rightarrow R_{m+1}(a,h) = o(\|h\|^m)$

Tvrzení: $f,g: A\to\mathbb{R}^N$, A ot., $f,g\in C^1(A)$. Pak $\forall a\in A$ existují TD následujících funkcí:

(i) $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$

(ii) $d(f\cdot g)(a) = df(a)\,g(a) + f(a)\,dg(a)$

(iii) $g(a)\neq 0 \Rightarrow d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{g(a)\,df(a) - f(a)\,dg(a)}{g^2(a)}$

Dk: $f+g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g} \in C^1$ na okolí $a \Rightarrow$ mají TD, vzorce plynou z výpočtu PD.

Pozn: tvrzení lze dokázat za slabších předpokladů: f a g mají TD, ale důkaz s odhadem chybové fce:

Tvrzení: $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $g\in C^k(\mathbb{R}^n)$, $f\in C^k(\mathbb{R}^m)$. Pak $f\circ g\in C^k(\mathbb{R}^n)$ a má TD k-tého řádu.

Dk: indukcí: $k=1$ řetízkové pravidlo, pamatujte si ($F=f\circ g$) $\frac{\partial F}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}$ (*)

$k=2$: derivuje (*) $$\frac{\partial F}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}=\sum_{j_1,j_2=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial y_{j_1}\partial y_{j_2}}\frac{\partial g_{j_1}}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial g_{j_2}}{\partial x_{i_2}}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial^2 g_j}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}$$

atd. z postupu je vidět, že l-tá derivace F je C^{k-l}, viz minulé Tvrzení. (pro 3. PD je vzorec už dost hrozný) □

Důkaz Taylora.

Položme $F(t)=f(a+th)$, pak $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dle předch. Tvrzení $F\in C^{m+1}([0,1])$ a můžeme aplikovat Taylorův rozvoj + Lagrangeův tvar zbytku v dim $=1$.

$$F(t)-F(0)=F'(0)t+\frac{1}{2!}F''(0)t^2+\dots+\frac{1}{m!}F^{(m)}(0)t^m+\frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(\tau)t^{m+1}$$

Zderivujeme podle řetízkového pravidla

$F'(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+th)\cdot h_j$ $\qquad t=0$: $F'(0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\cdot h_j$

$F''(t)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a+th)h_jh_i$ $\qquad t=0$: $F''(0)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}h_jh_i$

atd. indukcí. □

Př: Taylor 2. řádu pro $f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$, $a=(0,0)$:

z definice: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{-\sin x}{\cos y}\Big|_{(0,0)}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{\cos x\sin y}{\cos^2 y}\Big|_{(0,0)}=0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\frac{-\cos x}{\cos y}\Big|_{(0,0)}=-1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{-\sin x\sin y}{\cos^2 y}\Big|_{(0,0)}=0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=\cos x\,\frac{\cos y\cos^2 y+\sin y\cdot 2\cdot\cos y\sin y}{\cos^4 y}\Big|_{(0,0)}=1$

tedy $\frac{\cos x}{\cos y}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+o(\|(x,y)\|^2)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+o(x^2+y^2)$

přímo: $\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\frac{y^2}{2}+o(y^2)}=\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{x^2y^2}{4}+o(x^2)+o(y^2)+x^2o(y^2)+y^2o(x^2)$

$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+o(x^2+y^2)$

Lokální extrémy funkcí více proměnných

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, def na $U_\delta(a), \delta>0$, má v a:

Loc. max. $\Leftrightarrow \exists \delta>0: \forall x \in U_\delta(a): f(x) \leq f(a)$ (ostré loc. max: <)

Loc. min $\Leftrightarrow$ … $\geq$

Loc max vzhledem k $A \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists \delta>0: \forall x \in U_\delta(A) \cap (a): f(x) \leq f(a)$

podobně (ostré) loc min/max (vzhledem k A).

Glob. max $\Leftrightarrow \forall x \in D_f$ $f(x) \leq f(a)$ atd.

Př: $f(x,y) = x^2+y^2$, $A = \{x^2+y^2=1\}$, $\forall a \in A$ má f v a loc min, loc max, i glob. ale je vzhledem k A.

Věta (nutná podmínka extrému):

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\exists \delta>0: U_\delta(a) \subset D_f$, f má loc. extrém v $a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (i-tá PD $=0$ nebo neexistuje) $\forall i = 1..n$.

Dk: jako v 1. semestru, nenulová PD (byť jednostranná) $\Rightarrow \forall_{\delta>0} \exists x, y \in U_\delta(a)$:

$f(x) < f(a) < f(y)$ □

Př: $f(x,y,z) = 3x + \sin y \cos z + e^{y \cdot z}$ nemá loc extrém v $\mathbb{R}^3$, neboť $\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \neq 0$ na celém $\mathbb{R}^3$

Def: Nechť A je symetrická matice typu $N \times N$. Pak kvadratická forma

$$Q(h) = (Ah, h) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} h_i h_j \text{ je}$$

<u>pozitivně definitní</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (Ah,h) > 0$ $\forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$

<u>pozitivně semidefinitní</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (Ah,h) \geq 0$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$

<u>negativně definitní</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (Ah,h) < 0$ $\forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$

<u>negativně semidefinitní</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (Ah,h) \leq$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$

<u>indefinitní</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists h, k \in \mathbb{R}^n: (Ah,h) > 0, (Ak,k) < 0$

Def: $a \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a je <u>stacionární bod</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ $\forall i = 1..n$

Věta (Postačující podmínka pro loc. extrém):

Nechť $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ je stac. bod f, $\exists \delta > 0 : f \in C^3(U_\delta(a))$.

Definujme kvadratickou formu $(Ah,h) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j = Q(h)$

Pak: (i) $\underset{Q(h)}{(Ah,h)}$ je pozitivně definitní $\Rightarrow$ f má v a ostré loc. min.

(ii) $\underset{Q(h)}{(Ah,h)}$ je negativně definitní $\Rightarrow$ f má v a ostré loc. max.

(iii) $\underset{Q(h)}{(Ah,h)}$ je indefinitní $\Rightarrow$ f nemá v a extrém (sedlový bod)

poznámky: sedlový bod: $a = (0,0)$, $f(x,y) = x^2 - y^2$

semidefinitní forma: $f(x,y) = \pm x^4 \pm y^4$ → může nastat loc. min, max, sedlo

POSTUP: 1. krok: určíme stac. body

2. krok: rozhodneme dle věty výše, jde-li to

3. krok (ostatní body): existence extrému se dokazuje samostatnými odhady
vyšetřením podél speciálních trajektorií

Příklad (na 3. krok): $x^4 + y^4 \geq 0$ v $\mathbb{R}^2$ a v 0 hodnota 0 $\Rightarrow$ loc. min (dokonce glob., ostré)

$x^4 - y^4$: podél $(x,0) \ldots f(x,0) = x^4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
podél $(0,y) \ldots f(0,y) = -y^4 < 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$ a

Lemma: (Ah,h) je poz. def. $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : (Ah,h) \geq \alpha \|h\|^2$. (pro neg. def. $(Ah,h) \leq -\alpha \|h\|^2$)

Dk: $(Ah,h) = \|h\|^2 \cdot \left(A\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right)$. Ale jednotková sféra je v $\mathbb{R}^N$ kompakt a (Ah,h) spojitá $\Rightarrow$ nabývá minima $\overset{\text{poz. def}}{\Rightarrow}$ minimum > 0. □

Důkaz věty: Taylor: $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{N} 0 \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a+\theta h) h_i h_j h_k$

$= \frac{1}{2} Q(h) + o(\|h\|^2)$

poz. def: $f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \alpha \|h\|^2 + o(\|h\|^2) > 0$ na dost malém okolí $\Rightarrow$ loc. min

neg. def: podobně ... loc. max

indefinitní: $\exists H \in \mathbb{R}^N : Q(H) > 0$, ozn. $h = \theta H$, $\theta \in \mathbb{R}$, pak
lze $\|H\| = 1$

$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \theta^2 Q(H) + o(\theta^2) > 0$ na dost malém okolí

podobně $\exists K \in \mathbb{R}^N$, $Q(K) < 0$, $\|K\| = 1$ atd. □

Určování signatury kvadratických forem

1. diagonalizace : Lineární algebra

2. převod na čtverce : postupně vyčleňujeme proměnné, které mají nenulový koeficient u svého čtverce.

Př: $Q(h) = 4h_2^2 + 7h_3^2 + 4h_1h_2 + 2h_1h_3 + 16h_2h_3$ vyčleníme h_2

$= (h_1 + 2h_2 + 4h_3)^2 - h_1^2 - 6h_1h_3 + 9h_3^2$ teď h_3

$= (h_1 + 2h_2 + 4h_3)^2 - (h_1 + 3h_3)^2$ indefinitní

3. Sylvestrova věta : $Q(x)$ poz. def $\iff$ všechny hlavní subdeterminanty jsou kladné

pozn: přechodem k $-Q(x)$: $Q(x)$ neg. def $\iff -, +, -, + \dots$

Př výše: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ $D_1 = 0$, $D_2 = -4$, $D_3 = 0 + 16 + 16 - 4 - 28 - 0 = 0$

NEVIDÍME NIC, CO SE EXTRÉMU TÝKÁ

Př: $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 12y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 12x$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2$ $\Rightarrow$ stacionární body $(0,0,-1), (24,-144,-1)$

obecně $Q(h) \rightarrow \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. v $(0,0,-1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Sylvestr: ani poz., ani neg. ale zúží $f(x,0,0) = x^3$ NIC.

v $(24,-144,-1)$: $\begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Sylvestr: $D_1 > 0$

$D_2 = 288 - 144 > 0$

$D_3 = 144 \cdot 4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 2 \cdot 144 > 0$ $\Rightarrow$ loc. min.

glob. nic není $f(x,0,0) = x^3$

__pozn:__ Pokud bychom zkoumali signaturu kvadratické formy příslušející druhému diferenciálu v nějakém okolí bodu a

pak: pos. semidef na okolí => loc min (obecně neostré)

neg. semidef. na okolí => loc max (— // —)

viz. Kopáček II.

Věta o implicitní funkci

Motivace: Při řešení rovnic ve tvaru totálního diferenciálu jsme se setkali s funkcemi, které nelze vyjádřit explicitně. Přesto se dá zjistit velké množství informací.

Věta o implicitní funkci (dim = 2)

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ot., $F \in C^1(\Omega)$, $[a,b] \in \Omega$, $F(a,b) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Pak $\exists \delta, \Delta > 0: \forall x \in U_\delta(a)\ \exists!\ y = y(x) \in U_\Delta(b)$ splňující $F(x,y) = 0$.

Navíc funkce $x \to y(x) \in C^1(U_\delta(a))$ a $y'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}$ $\forall x \in U_\delta(a)$.

Dále $F \in C^k(\Omega) \Rightarrow y(x) \in C^k(U_\delta(a))$.

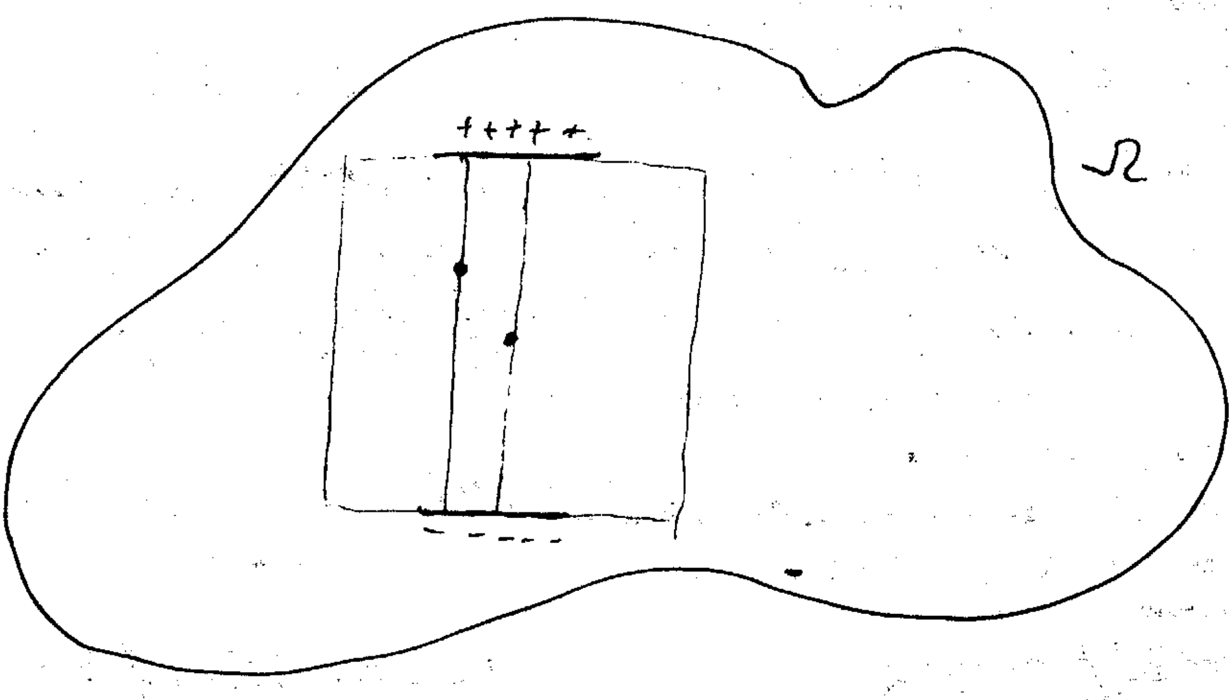
Dk: ukážeme jen existenci, podobně snadná je ještě spojitost, derivování je dlouhé

BÚNO $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0 \overset{F \in C^1}{\Longrightarrow} \exists \Delta > 0: \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$ na $[a-\Delta, a+\Delta] \times [b-\delta, b+\delta] \subset \Omega$.

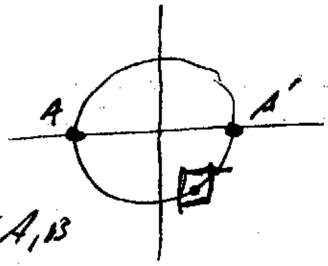
$F(a,y)$ tedy roste na $[b-\Delta, b+\Delta] \Rightarrow F(a, b-\Delta) < 0$ a $F(a, b+\Delta) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ \delta \in (0,\Delta): F(x, b-\Delta) < 0$ a $F(x, b+\Delta) > 0$ $\forall x \in [a-\delta, a+\delta] \Rightarrow$

$\overset{\text{Darboux pro pevné } x}{\Longrightarrow} \exists\ y(x) \cdot F(x, y(x)) = 0$, navíc $\frac{\partial F}{\partial y}(x,\cdot) > 0 \Rightarrow$ takové y je jen jedno na $[a-\delta, a+\delta]$.



Př: $x^2+y^2=1$ tj. $F(x,y)=x^2+y^2-1$



v bodech A, A' očekáváme porušení IFT, když:

$F\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x^2+y^2=1}=2y\neq 0 \iff x^2+y^2=1 \wedge [x,y]\neq A,B$

IFT lze tedy užít ve všech ostatních bodech,

navíc $y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$ a to lze vztáhnout na celou horní, resp. dolní, půlkružnici

2. postup, navíc vhodný pro zjišťování derivací vyšších řádů

$x^2+y^2(x)-1=0$ dále derivujeme a dosazujeme, např. $[0,1]$

$2x+2y(x)y'(x)=0$ .... $2.0+2.-1.y'=0 \Rightarrow y'(0)=0$

$2+2y'^2(x)+2y(x)y''(x)=0$ ... $2+2.0+2(-1).y'' \Rightarrow y''(0)=1$ atd.

Př: $F(x,y)=x^3-y^3$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-3y^2\neq 0 \iff y\neq 0$, tedy IFT nelze užít v bodě $[0,0]$, nicméně je vidět $x^3-y^3=0 \iff x-y=0 \iff x=y$

Tedy porušení předpokladů IFT nemusí být způsobeno jen geometricky rozumnými důvody, ale špatnou volbou funkce popisující danou množinu.

Př: (Zajíček 346): Dokažte, že množina $\{(x,y): e^y+\ln(x)+xy=0\}$ je grafem C^2 fce na $(0,\infty)$.

a) nalezněte x_0 nulový bod fce f a vypočtěte $f'(x_0)$

b) vypočtěte $\lim_{x\to 0_+} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

c) dokažte, že f nabývá glob. minima právě v jednom bodě.

Řešení: podmínky IFT: $F\in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$, $\frac{\partial F}{\partial y}=e^y+x>0$, existence a jednoznačnost: pevné x_0: $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y)>0$, $\lim_{y\to\pm\infty}F(x_0,y)=\pm\infty \Rightarrow$ nulu protne právě jednou.

a) $f(x_0)=0: 1+\ln x_0+0=0 \Rightarrow x_0=\frac{1}{e}$, $y'(\frac{1}{e})=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{\frac{1}{x}+y}{e^y+x}=\frac{-e}{1+\frac{1}{e}}=\frac{-e^2}{1+e}<0$

b) $x\to 0_+ \Rightarrow \ln x\to -\infty \Rightarrow y\to +\infty$

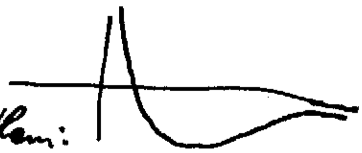
$x\to\infty$: $y(x)<0$ od jistého x_0

pokud není x_0: $|y(x)|<\frac{1}{\sqrt{x}}\ \forall x\geq x_0$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} y(x)=0$

pak $\exists x_n$, $e^y+\ln(x)+xy<1+\ln(x)+\sqrt{x_n}\neq 0$ ↯

$x_n\to\infty$

celkem:



c) $y'=0 \iff \frac{\frac{1}{x}+y}{e^y+x}=0 \iff y=-\frac{1}{x}$

dosadíme do IF: $\exp(-\frac{1}{x})+\ln x+1=g(x)>0$, ale $\lim_{x\to 0_+} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty$

$g'(x)=\exp(-\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}>0$

Př: Spočtěte druhou derivaci inverzní funkce:

Řešení: $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) - x = 0$, položme tedy $F(x,y) = f(y) - x$

předpoklady IFT: $F \in C^k \Leftrightarrow f \in C^k$, $\frac{\partial F}{\partial y} = f'(y) \neq 0$ požadujeme a příslušnost bodu k množině mi dává existence f^{-1}

aplikace IFT: $f(y) - x = 0$

$$f'(y) \cdot y' - 1 = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{f'(y(x))}$$

$$f''(y) \cdot y'^2 + f'(y) y'' = 0 \Rightarrow y''(x) = \frac{-f''(y(x))}{f'^3(y(x))}$$

Obecnější verze IFT (Jarník DII)

$M, N \in \mathbb{N}$, G ot $\subset \mathbb{R}^{M+N}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_M, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N] \in G$.

(i) $F_j \in C^1(G, \mathbb{R})$ $\forall j = 1, \dots, N$

(ii) $F_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ $\forall j = 1, \dots, N$

(iii) $\det \left(\frac{\partial F_j}{\partial y_k}(\tilde{x}, \tilde{y}) \right)_{j,k=1}^{N} \neq 0$.

Pak $\exists\, \delta, \Delta > 0$: $\forall x \in \mathcal{U}_\delta(\tilde{x})\ \exists!\, y = y(x) \in \mathcal{U}_\Delta(\tilde{y})$: $F_j(x, y) = 0$ $\forall j = 1, \dots, N$.

a $y_i \in C^1(\mathcal{U}_\delta(\tilde{x}))$ $\forall i = 1, \dots, N$ $\{y_i$ je i-tá složka $y\}$

Dk: 8 stránek v DII. Srovnání: L'H v DI má 2 stránky.

Př: $x+y+z=0$ spočtěte $\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}$

$x^2+y^2+z^2=1$

předpoklady IFT: (i) rovnice č. hladké funkce

(ii) stejný rovnic = rovnice

(iii) $\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2x & 2y\end{pmatrix} = 2(x-y) = 0 \iff x=y$ a $2\cancel{x}+z=0$

$2x^2+z^2=0$

zakázané body: $\left[\frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, -\frac{2}{\sqrt6}\right]$

$\left[-\frac{1}{\sqrt6}, -\frac{1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6}\right]$

$x'+y'+1=0 \implies x' = -1-y'$

$2xx'+2yy'+2z=0$

$\implies -2x-2xy'+2yy'+2z=0$

$(z-x)-(x-y)y'=0$

$\underline{\underline{y' = \frac{z-x}{x-y}}}$

$\underline{\underline{x'}} = -1-y' = \frac{y-x}{x-y} + \frac{x-z}{x-y} = \underline{\underline{\frac{y-z}{x-y}}}$

Věty o Lagrangeových multiplikátorech

Motivace: Při hledání extrémů často postupujeme tak, že původní množinu rozdělíme na vnitřek a hranici, kterou se snažíme parametrizovat. V případě neúspěchu může pomoci následující

Věta (o LM, dim = 2):

Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ ot, $f, g \in C^1(G)$, $M = \{(x,y) \in G : g(x,y) = 0\}$, $\left[\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right] \neq [0,0]$ na G.

Pak f má v $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ loc. extrém vzhledem k M $\Rightarrow$ $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0.$$

Pozn: (i) Body podezřelé z extrému vzhledem M: řešíme soustavu tří rovnic (výše uvedené dvě + $g(x,y)=0$) pro tři neznámé $\hat{x}, \hat{y}, \lambda$.

(ii) Jiný pohled: položme $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ a hledáme kritické body tohoto zobrazení z $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, uvažte $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x,y)$.

Př: $f(x,y) = x^3 + y^3$ na $M = \{x^2 + y^2 = 1\}$

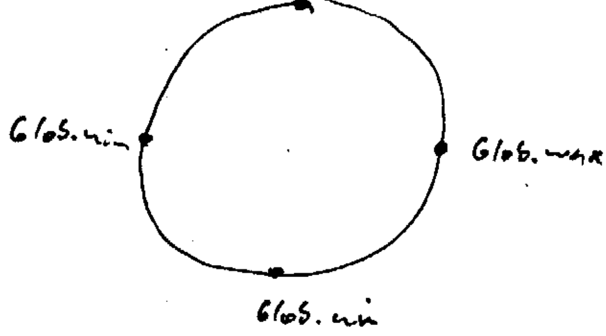
$L = x^3 + y^3 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$3x^2 + 2\lambda x = 0$ z prvních dvou rovnic ... tři možnosti:

$3y^2 + 2\lambda y = 0$ $x = 0 \Rightarrow [0,1]\ f = 1,\ [0,-1]\ f = -1$

$x^2 + y^2 = 1$ $y = 0 \Rightarrow [1,0]\ f = 1,\ [-1,0]\ f = -1$

$\lambda = -\frac{3x}{2} = -\frac{3y}{2} \Rightarrow x = y \Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\ f = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\ f = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



Dk (LM dim 2):

BÚNO $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \overset{\text{IFT}}{\Longrightarrow} \exists \delta, \Delta > 0$ a $y(x): (\tilde{x}-\delta, \tilde{x}+\delta) \to (\tilde{y}-\Delta, \tilde{y}+\Delta)$

takovou, že $g(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in (\tilde{x}-\delta, \tilde{x}+\delta)$.

Dále $h(x) := f(x, y(x))$ má loc. extrém v $\tilde{x}$

$$\Rightarrow \quad h'(\tilde{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot y'(\tilde{x}) = 0$$

$$g(x, y(x)) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot y'(\tilde{x}) = 0$$

Tedy homogenní soustava dvou lineárních rovnic s maticí $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix}$

má netriviální řešení $[1, y'(\tilde{x})] \Rightarrow$ řádky LZ

$$\overset{\text{sloupec } \neq [0,0]}{\Longrightarrow} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}), \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})\right] = \lambda \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}), \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})\right], \ \lambda \in \mathbb{R} \quad \square$$

<u>Obecnější verze LM:</u>

G ot. $\subset \mathbb{R}^N$, $M < N$, $f, g_1, \dots g_M \in C^1(G)$, $\mathcal{M} = \{x \in G : g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \dots, g_M(x) = 0\}$, hodnost matice $\left\{\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right\}_{i=1, j=1}^{M, N} = M$ na G. Pak má-li f v $\tilde{x} \in \mathcal{M}$ loc. extrém vzhledem k $\mathcal{M}$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) = 0 \quad \forall j = 1 \dots N$$

pozn: $M+N$ rovnic pro $M+N$ neznámých

pozn: V Kopáčkovi je ještě druhá část věty hovořící o klasifikaci bodů podezřelých z lokálních extrémů pomocí kvadratických forem restringovaných na $\mathcal{M}$.

Regulární zobrazení a záměna proměnných

Def: $f: G \text{ ot} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je regulární jestliže
(i) $f \in C^1(G)$
(ii) $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^N \neq 0$ v G.

Věta o regulárním zobrazení:

Nechť $f: G \text{ ot} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je regulární. Pak
(i) $\forall a \in G\ \exists \delta>0: f$ je prosté na $U_\delta(a)$.
(ii) $A \text{ ot} \subset G \Rightarrow F(A)$ ot.
(iii) f prosté na $G \Rightarrow f^{-1}: f(G)\to G$ je regulární

Dk: (i) ozn. $b=f(a)$, pak $f_j(a_1,\dots,a_N)=b_j\ \forall j=1\dots N \Leftrightarrow f_j(a_1,\dots,a_N)-b_j=0$

ozn. $F_j(x,y) := f_j(x_1,\dots,x_N) - y_j$ (*) a IFT $\Rightarrow \exists \delta,\Delta>0: \forall y\in U_\delta(b)\ \exists! x\in U_\Delta(a)$ splň. (*).

To je prostota. Označme tuto fci $x_i = \varphi_i(y_1,\dots,y_N)$.

(ii) už hotové, neboť výše jsme $\forall b\in F(A)$ našli $U_\delta(b)\subset F(A)$.

(iii) $f\in C^1(G) \Rightarrow F\in C^1(G\times\mathbb{R}^N) \overset{IFT}{\Rightarrow} (\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_N)\in C^1(f(G))$, což je to inverzní zobrazení.

Zbývá nenulovost determinantu $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\right)$ v $f(G)$. Ale dosaďme:

$$f_i(\varphi_1(y_1,\dots,y_N),\varphi_2(y_1,\dots,y_N),\dots,\varphi_N(y_1,\dots,y_N)) = y_i \quad \forall i=1\dots N$$

Vlevo je složené C^1-zobrazení, použijme řetízkové pravidlo pro $\frac{\partial}{\partial y_j}$:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_j} = \delta_{ij}, \text{ tedy } \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)\cdot\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j}\right) = \begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix},$$

tedy žádná z matic vlevo nemůže mít nulový determinant.

Př.: Převeďte do polárních souřadnic a vyřešte:

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

polární souřadnice: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $\quad (*)$

$$\det\begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

tedy $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y=0,\ x\le 0\} \longleftrightarrow (r,\varphi) \in \big((0,\infty)\times(0,2\pi)\big)$ vzájemně jednoznačné, tím i zpět C^1?

Dále

$$u_y = u_r r_y + u_\varphi \varphi_y$$
$$u_x = u_r r_x + u_\varphi \varphi_x$$

Zderivování $(*)$:

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\ 1 = r_x\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi_x && \cos\varphi\,\text{I} + \sin\varphi\,\text{III}:\ \cos\varphi = r_x\\
&\text{II.}\ 0 = r_y\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi_y \quad \Rightarrow && \cos\varphi\,\text{II} + \sin\varphi\,\text{IV}:\ \sin\varphi = r_y\\
&\text{III.}\ 0 = r_x\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi_x && -\sin\varphi\,\text{I} + \cos\varphi\,\text{III}:\ -\sin\varphi = r\varphi_x \Rightarrow \varphi_x = -\frac{\sin\varphi}{r}\\
&\text{IV.}\ 1 = r_y\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi_y && -\sin\varphi\,\text{II} + \cos\varphi\,\text{IV}:\ \cos\varphi = r\varphi_y \Rightarrow \varphi_y = \frac{\cos\varphi}{r}
\end{aligned}$$

tedy rovnice:

$$r\cos\varphi\cdot\left(u_r\sin\varphi + u_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}\right) - r\sin\varphi\left(u_r\cos\varphi - u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right) = 0$$
$$u_\varphi = 0$$

tzn: je-li $f \in C^1((0,\infty))$, pak $u(r,\varphi) = f(r)$ řeší původní rovnici

$$\Downarrow$$

$$u(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Aplikace Banachovy věty o kontrakci na diferenciální rovnice

Úloha: dokázat existenci a jednoznačnost řešení rovnice

(1) $y' = f(x,y)$ $\quad f: G \text{ ot} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá

$y(x_0) = y_0$ $\quad \exists L > 0: |f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y-z|, \forall [x,y],[x,z] \in G$

$[x_0, y_0] \in G$

připomenutí: $y(x)$ řeší (1), pokud $y \in C^1(a,b)$, $a < x_0 < b$, $[x, y(x)] \in G$ $\forall x \in (a,b)$

a $y(x)$ splňuje (1) všude na (a,b)

Zkoumejme:

(2) $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$

Lemma: $y(x)$ řeší (1) $\Leftrightarrow$ $y(x)$ je spojitá a řeší (2).

Dk: "$\Rightarrow$": $y \in C^1 \Rightarrow y$ spojitá a má tedy primitivní funkci, integruje (1):

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

"$\Leftarrow$": f, y spojité $\Rightarrow$ pravá strana (2) se dá zderivovat, tedy i levá $\square$

Řešení (2):

Zvolme $\tilde{G}$ ot $\subset G$, aby: $\overline{\tilde{G}} \subset G$, $[x_0, y_0] \in \tilde{G}$. Odtud $\exists K > 0: |f(x,y)| \leq K$ na $\tilde{G}$.

Zvolme $d > 0$, aby: $L \cdot d < 1$ a $[x_0 - d, x_0 + d] \times [y_0 - Kd, y_0 + Kd] \subset \tilde{G}$.

Definujme prostor $C^* := \{\varphi \in C([x_0 - d, x_0 + d]; [y_0 - Kd, y_0 + Kd])\}$ s maximovou metrikou.

Díky vlastnostem stejnoměrné konvergence je C^* úplný

Položme $\Phi: y \mapsto (x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt)$.

Pak $\Phi: C^* \to C^*$. Skutečně, díky vlastnostem integrálu s proměnnou horní mezí zobrazíme jen spojité funkce, dále díky $|f(x,y)| \leq K$ je obor hodnot těchto získaných funkcí vždy $\subset [y_0 - Kd, y_0 + Kd]$.

Konečně, Φ je kontrakce na C^*:

$$\|\Phi(y)-\Phi(z)\| = \max_{x\in[x_0-d,x_0+d]} \left|\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t,z(t))\,dt\right| \le \max_{x\in[x_0-d,x_0+d]} \int_{x_0}^{x} |f(t,y(t))-f(t,z(t))|\,dt$$

$$\le \max_{x\in[x_0-d,x_0+d]} |x_0-x|\, L\, \|y-z\| \le dL\|y-z\| < \|y-z\|.$$

Tedy Banachova věta: $\exists!$ pevný bod $\Leftrightarrow \exists!$ řešení (2) na $[x_0-d,x_0+d]\times[y_0-kd,y_0+kd]$

pozn: Při hledání přibližného řešení, lze použít postupné aproximace:

$\varphi_0(x)=y_0$ (konstantní fce)

$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))\,dt$

Př: $y'=y$, $y(0)=1$

tedy $\Phi(y)(x) = 1+\int_{x_0}^{x} y(t)\,dt$

$\varphi_0 \equiv 1$

$\varphi_1 = 1+\int_0^x 1\,dt = 1+x$

$\varphi_2 = 1+\int_0^x 1+t\,dt = 1+x+\frac{x^2}{2}$

$\varphi_3 = 1+\int_0^x 1+t+\frac{t^2}{2}\,dt = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ postupně dostáváme Taylora od $\exp x$.

pozn: Soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu

$y_1' = f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x))$

$\vdots$ $\qquad\qquad y_i(\tilde{x}) = \tilde{y}_i$, $i=1,\dots,n$

$y_n' = f_n(x, y_1(x), \dots\dots y_n(x))$

tj $y' = F(x, y(x))$, $y(\tilde{x}) = \tilde{y}$

$y\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, $F\in C(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}^n)$, $\tilde{x}\in\mathbb{R}$, $\tilde{y}\in\mathbb{R}^n$

Přidáme podmínku lipschitzovskosti a můžeme postupovat jako výše

$\|F(x,y)-F(x,z)\| \le L\|y-z\|$. $\qquad$ ~~Metrika~~ $\varrho(y,z) = \max_{\substack{i=1..n\\ x\in[x_0-d,x_0+d]}} |y_i(x)-z_i(x)|$

a integrál chápeme: $\int_{x_0}^{x} F(t,y(t))\,dt \overset{def}{=} \left(\int_{x_0}^{x} F_1(t,y(t))\,dt, \int_{x_0}^{x} F_2(t,y(t))\,dt, \dots, \int_{x_0}^{x} F_n(t,y(t))\,dt\right)$

MAF 041 – cvičení

1. týden: Určitý integrál

2. týden: Věnujeme Dr. Polovraníma

3. týden: Metriky, normy, skalární součin, Banachův princip kontrakce

4. týden: lib. průnik uz. je uz., konečné sjednocení ot. je ot.

+

$\overline{\emptyset}=\emptyset$, $M\subset N \Rightarrow \overline{M}\subset\overline{N}$, $\overline{\{x\}}=\{x\}$, $\overline{M\cup N}=\overline{M}\cup\overline{N}$, $\overline{\overline{M}}=\overline{M}$, $M\subset\overline{M}$

$\partial A=\overline{A}\cap\overline{P\setminus A}$, ∂A uz.

$A^\circ = A\setminus\overline{P\setminus A}$, $M^\circ\cap N^\circ=(M\cap N)^\circ$

A' uz., $\emptyset'=\emptyset$, $M\subset N \Rightarrow M'\subset N'$, $(M\cup N)'=M'\cup N'$, $\overline{M}=M'\cup M$

ale obecně $P'\neq P$, $A''\neq A'$

Vše dokázat, případně další v L. Zajíček: Vybrané úlohy

(Definice z přednášky: A ot $\Leftrightarrow \forall x\in A\ \exists \varepsilon>0: U_\varepsilon(x)\subset A$, A uz $\Leftrightarrow P\setminus A$ ot,
$\overline{A}$ = nejmenší uz. nadmnožina, A° = největší ot podmnožina, $\partial A=\overline{A}\setminus A^\circ$, A' = množ. hrom. bodů)

5. týden: limita a spojitost fcí z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, vrstevnice

6. týden: rozpoznání ot. a uz. množin (vzor při spoj zobrazení ... + $\cup$ + $\cap$)

Spojitá na kompaktu má max a min (zatím bez Lagrange, protože derivace byly v 1. semestru, nutno počítat vysvětlit)

Příklady typu: spojitá na trojúhelníku, spojitá na kruhu, (trénink parametrizace křivice)

ořezání na kompakt (např: $(x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}$ na $\{x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$)

následuje: Parciální derivace, totální diferenciál, rovnice ve tvaru TD

PÍSEMKA: 4 příklady z: rovnice ve tvaru TD
glob extrémy
loc extrémy
impl. fce (eventuálně záměna proměnných).

+0-46 za záp. písemky

+0-26 za práci na cvičení

Example 3. $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. The linear space $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, introduced in Chapter I, 1, is a quasi-normed linear space by the quasi-norm $\|x\| = d(x, 0)$, where the distance $d(x, y)$ is defined in Chapter I, 1.

5. Pre-Hilbert Spaces

Definition 1. A real or complex normed linear space X is called a *pre-Hilbert space* if its norm satisfies the condition

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1}$$

Theorem 1 (M. Fréchet-J. von Neumann-P. Jordan). We define, in a real pre-Hilbert space X,

$$(x, y) = 4^{-1}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{2}$$

Then we have the properties:

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad (\alpha \in R^1), \tag{3}$$

$$(x+y, z) = (x, z) + (y, z), \tag{4}$$

$$(x, y) = (y, x), \tag{5}$$

$$(x, x) = \|x\|^2. \tag{6}$$

Proof. (5) and (6) are clear. We have, from (1) and (2),

$$\begin{aligned}(x, z) + (y, z) &= 4^{-1}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2)\\ &= 2^{-1}\left(\left\|\frac{x+y}{2} + z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2} - z\right\|^2\right)\\ &= 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right).\end{aligned} \tag{7}$$

If we take $y = 0$, we obtain $(x, z) = 2\left(\frac{x}{2}, z\right)$, because $(0, z) = 0$ by (2). Hence, by (7), we obtain (4). Thus we see that (3) holds for rational numbers α of the form $\alpha = m/2^n$. In a normed linear space, $\|\alpha x + y\|$ and $\|\alpha x - y\|$ are continuous in α. Hence, by (2), $(\alpha x, y)$ is continuous in α. Therefore (3) is proved for every real number α.

Corollary (J. von Neumann-P. Jordan). We define, in a complex normed linear space X,

$$(x, y) = (x, y)_1 + i(x, iy)_1,$$

$$\text{where } i = \sqrt{-1},\ (x, y)_1 = 4^{-1}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{8}$$

Then, we have (4), (6) and

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad (\alpha \in C^1), \tag{3'}$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \text{ (complex-conjugate number)}. \tag{5'}$$