

## Posloupnosti a řady funkcí

## Posloupnosti funkcí

Najděte obor bodové konvergence a hodnotu limity posloupnosti funkcí

1. 
$$e^x \frac{\sin x \sin 2x \dots \sin nx}{\sqrt{n}}$$

2. 
$$\frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$$

3. 
$$\sin \pi x n$$

Zjistěte, zda na daných množinách konvergují posloupnosti funkcí stejnoměrně.

4. 
$$x^n - x^{n+1} \quad \text{na } [0, 1]$$

5. 
$$x^n - x^{2n} \quad \text{na } [0, 1]$$

6. 
$$\operatorname{arctg} nx \quad \text{na } (0, \infty)$$

7. 
$$\frac{nx}{1 + n^2 x^2} \quad \text{na a) } \{x \in C; |x| \leq \varepsilon\} \quad \text{b) } \{x \in C; |x| \geq \varepsilon\}$$

8. 
$$\sin \pi x^n \quad \text{na } [0, 1]$$

9. 
$$\frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \quad \text{na a) } (0, \varepsilon) \quad \text{b) } (\varepsilon, \infty)$$

## Posloupnosti a řady funkcí

## Řady funkcí

Najděte obor absolutní a neabsolutní bodové konvergence řad funkcí

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$$

3. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

4. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

5. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \cos x$$

6. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}, \quad p \in R$$

7. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + y^n}, \quad y \in R_0^+$$

Zjistěte, zda řady funkcí konvergují stejnoměrně na daných intervalech

8.  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$  a)  $[0, 1]$  b)  $[0, \frac{999}{1023}]$
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}}$  a)  $[\epsilon, 2\pi - \epsilon], 0 < \epsilon < \pi,$  b)  $[0, 2\pi]$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$  a)  $[-K, K], K > 0,$  b)  $(-\infty, \infty)$
11.  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$  a)  $[-K, K], K > 0,$  b)  $(-\infty, \infty)$
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sqrt[3]{x^2}$  a)  $[0, K], K > 0,$  b)  $[0, \infty)$
13.  $\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{nx}, \alpha \in \mathbb{Z}_0^+$  a)  $(-\infty, -1]$  b)  $[-1, 0]$  c)  $[0, 1]$
14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{x^2+k^2}) \sqrt[3]{\frac{x^2}{1+x^2}}, k \in \mathbb{R}$   $(-\infty, \infty)$
15.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$  a)  $[-K, K], K > 0,$  b)  $(-\infty, \infty)$
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x \ln \frac{x}{n}$  a)  $(0, K], K > 0,$  b)  $(0, \infty)$
17.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} e^{-nx}$  a)  $[0, K], K > 0,$  b)  $[0, \infty)$

Příklady na 10. týden

## Posloupnosti a řady funkcí

### Mocninné řady

Určete poloměr konvergence daných mocninných řad a vyšetřete konvergenci na kružnici konvergence ( $z \in \mathbb{C}$ )

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n5^n}$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n, a \in \mathbb{R}^+$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n} z^n, a, b \in \mathbb{R}$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (z-1)^n$
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}, p \in \mathbb{R}$
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} z^n$
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p, p \in \mathbb{R}$
8. Vyšetřete konvergenci zobecněné mocninné řady ( $x \in \mathbb{R}$ )
- $$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{3x}{2+x^2}\right)^n$$