Písemka MAF035, Čt 10:50, M6 ↓

- Spočtěte objem průniku koule a kuželu, tj. $\mu_3(M)$ pro $M := \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + y^2 < R^2, x^2 + y^2 < z^2, z > 0\}$. Pozor, zaměřte se na správné určení mezí a správné použití příslušných vět. Jinak ztrácíte polovinu bodů.
- Rozhodněte, na jakých maximálních podintervalech R konverguje posloupnost
$$f_n(x) := \sin^n(x)$$
stejnoměrně a k čemu. Konverguje tato posloupnost lokálně stejnoměrně na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$? Proč? Konverguje stejnoměrně na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$? Proč?

DÚ ↓

39. Předpokládejme, že hmotnost je rovnoměrně rozložena s hustotou ρ v celém prostoru $\mathbb{R}_3$. Ukažte, že newtonovský potenciál nemá v žádném bodě konečnou hodnotu (tzv. *gravitační paradox*, ukazující, že vesmír nemůže být do nekonečna vyplněn hmotností rozloženou s průměrnou hustotou ρ, interagující podle Newtonova gravitačního zákona).

40. Předpokládejme, že jako v předchozím příkladu je hustota hmotnosti v celém $\mathbb{R}_3$ konstantní a rovná ρ. Ukažte, ža modifikace gravitačního zákona (*Neumann, Seeliger*), odpovídající potenciálu

$$\Phi(x, y, z) = -\kappa \int_{\mathbb{R}_3} \frac{\rho e^{-\lambda r}}{r} \, d\xi d\eta d\zeta,$$

kde $r = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}$ a *kosmologická konstanta* λ je (malé) kladné číslo s rozměrem převrácené hodnoty délky, odstraňuje gravitační paradox, tj. modifikovaný potenciál má v každém bodě stejnou konečnou hodnotu a najděte ji. Ukažte dále, že odpovídající intenzita gravitačního pole se pro $\lambda r \ll 1$ nepatrně liší od newtonovské, rozdíl se však silně projeví pro velké vzdálenosti (jde o tzv. *sílu krátkého dosahu*, analogickou „silám" odpovídajícím silné interakci mezi nukleony).