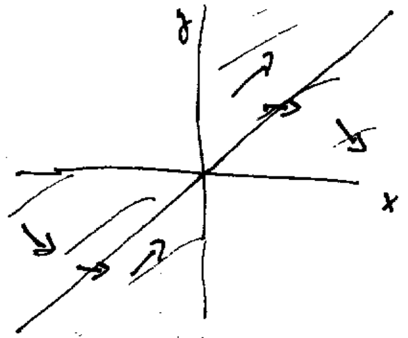
$y' = \frac{y}{x} \lg \frac{y}{x}$ $\qquad x \neq 0 \qquad y \cdot x > 0$



~~$\forall x, y > 0$~~ $, \frac{y}{x} > 1 \Rightarrow y' > 0$
$x > 0$

Homogenní: $z(x) = \frac{y(x)}{x}$; $y(x) = x\,z(x)$
$y'(x) = z(x) + x\,z'(x)$

$z + xz' = z \lg z$ $\quad$ 1

$z' = \frac{z(\lg z - 1)}{x} \longrightarrow \frac{z'}{z(\lg z - 1)} = \frac{1}{x} = (\lg(|x| \cdot c))'$

$c > 0$

$\int \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\lg z - 1}\, dz \underset{\lg z = w}{=} \int \frac{1}{w-1}\, dw = \lg|w-1|$ $\quad$ 1/2

$= \lg|\lg z - 1|$ na intervalech kde $z \neq e$ $\quad$ 1/2

$\longrightarrow |\lg z - 1| = c \cdot |x|$

a) $x > 0,\ z > e$: $\lg z - 1 = cx \rightarrow \lg z = cx + 1 \rightarrow z = e^{1+cx}$

$z > e$; $z = e \cdot e^{cx} \Rightarrow c \cdot x > 0$ ✓

$z(x) = e^{1+cx}$ je řešení na $x > 0\ \forall c > 0$ $\quad$ 1/2

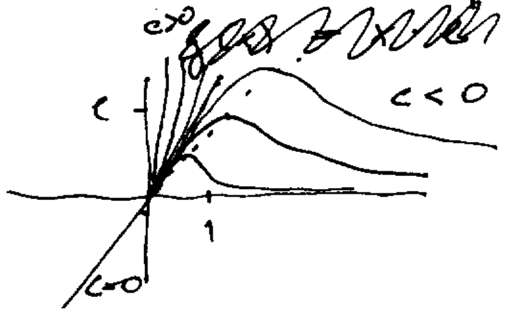
b) $x > 0 ; z < e$: $1 - \lg z = cx \rightarrow \lg z = 1 - cx \Rightarrow z = e \cdot e^{-cx}$

opět $z(x) = e \cdot e^{-cx}$ je řešení na $x > 0\ \forall c > 0$ $\quad$ 1/2

c, d, $x < 0$ podobně

Situace v y: $y(x) = x \cdot e^{1+cx}$ je řešení $x > 0$ ~~[illegible]~~ $\forall c \in \mathbb{R}$
a také na $x < 0$ $\quad$ 1

Obr:



1

$y' - 2xy = 2x^3$

i.f.: $\exp\left(\int -2x\,dx\right) = e^{-x^2}$ 1

$(y \cdot e^{-x^2})' = e^{-x^2} y' - 2x e^{-x^2} y = 2x^3 \cdot e^{-x^2} = \left(\left(C\right) - \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x^2}\right)'$ 1

$\int 2x^3 e^{-x^2}\,dx \underset{x^2 = y}{=} \int y e^{-y}\,dy = \left[-y e^{-y}\right] + \int e^{-y}\,dy =$

$\downarrow d \quad \downarrow i$

$1 \quad -e^{-y}$

$= -(y+1)e^{-y} =$

$= -(x^2+1)e^{-x^2}$

řešení: $y(x) = -x^2 - 1 + C \cdot e^{x^2}$ je řešení $\forall c > 0$ na $x \in \mathbb{R}$ 1

$y'' + 2y' + 2y = e^x + x\cos x$

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ 1 $\Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

f.s: $e^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x$ 1

řešení hledáme ve tvaru:

$Ae^x + (Bx + C)\cos x + (Dx + E)\sin x$ 1