DÚ 9   10, 11, 12, 15, 14

Bonus: Najděte $f_n \to 0$ na $(0,1)$ tak, aby $f_n \not\rightrightarrows 0$ na žádném $J \subset (0,1)$.

10) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$$

na $[-K,K]$: $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^2} < K$ ale to není dobrý odhad

$$f_n'(x) = \frac{1}{1+n^4x^2} - \frac{x \cdot n^4 \cdot 2x}{(1+n^4x^2)^2} = \frac{1+n^4x^2 - 2x^2n^4}{(1+n^4x^2)^2} = \frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}$$

$x = \pm \frac{1}{n^2}$ je krit. bod. Je to max? ANO! v $x = \frac{1}{n^2}$ a min v $-\frac{1}{n^2}$

$$|f(x)| < \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ konv. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konv. (abs.) st. na $[-K,K]$

Na $(-\infty,\infty)$ úplně stejně

11) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \lg\left(1+\frac{x^2}{n\lg^2 n}\right)$$

na $[-K,K]$: $|f_n(x)| := \left|\lg\left(1+\frac{x^2}{n \lg^2 n}\right)\right| \leq \dfrac{K^2}{n\lg^2 n}$

$\Rightarrow$ řada konv. st. (abs.) na $[-K,K]$

na $(-\infty,\infty)$ není splněna nutná podm. $\Rightarrow$ řada nek. st.

$$f_n(\sqrt{n}\lg n) = \lg 2.$$

12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sqrt[n]{x^2}$

na $[0, K)$: Konv. st. podle Abel + Dirichlet

(A) $\sqrt[n]{x^2}$ je pro pevné x monotónní a st. omezená

$$|\sqrt[n]{x^2}| < \sqrt[n]{K^2} < K^2$$

(D) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje

→ nel. abs. st. na $(0, K)$ protože nel. abs na $(0, K)$

→ na $(0, +\infty)$ není splněná nutná podm. abs. konv.

stačí volit $x = \sqrt{n^{n/2}}$

15) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$ na $[-K, K]$

1) $\frac{1}{n + \sin x} \to 0$; $\forall x \in [-K, K]$ je $\frac{1}{n + \sin x}$ monotónní na

⇒ řada konverguje st. na $[-K, K]$ a taky na $(-\infty, \infty)$

nel. absolutní stejnoměrně protože nel. absolutně

13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{x^2+n^2}\right) \cdot \sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}$ $(-\infty, \infty)$

$\sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}$ je omezená 1 a pro pevné x monotónní na stačí

ověřit st. konvergenci $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{x^2+n^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\pi \frac{x^2}{\sqrt{x^2+n^2}+n}\right)$

$\sin\left(\pi\sqrt{x^2+n^2} - n\pi\right) = \ldots \sin\left(\pi\sqrt{x^2+n^2}\right)(-1)^n$

na $(-\infty, +\infty)$ není splněna nutná podmínka stejn. konvergence:

$f_n(x) = \sin\left(\pi\sqrt{x^2+n^2}\right) \cdot \sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}$ nekonv. stejn. k 0 na $(-\infty, +\infty)$

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n : f_n(x) > \frac{1}{2}$

Protože: najdu $\tilde{x}$: $\forall x > \tilde{x}$: $\sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}} > \frac{1}{2}$ (lze: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}} = 1$)

najdu x_n takové, aby $x_n > \tilde{x}$ a $\sqrt{x_n^2+n^2} \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$.

na $(-K, K)$:

$|f_n(x)| \leq \frac{K^2}{1+K^2}$

$\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = + \frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$\sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}$ je omezená 1 a pro pevné x monotónní $\Rightarrow$ Abel?

vyšetřit $\sum \sin\left(\pi\sqrt{x^2+n^2}\right)$

$$\sin\left(\pi\sqrt{x^2+n^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi x^2}{\sqrt{x^2+n^2}+n}\right)$$

$$\left|\sin \frac{\pi x^2}{\sqrt{x^2+n^2}+n}\right| \leq \frac{\pi K^2}{2n} \longrightarrow 0$$ $\Rightarrow$ stejn. konv. posloupnosti $\sin \frac{\pi x^2}{\sqrt{x^2+n^2}+n}$

navíc: $g_a(y) := \frac{\pi a}{\sqrt{a+y^2}+y}$ pro $a \geq 0$; $g_a'(y) = \frac{-\pi a}{\left(\sqrt{a+y^2}+y\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{a+y^2}}\right)$

$g_a'(y) = 0 \Leftrightarrow -y = \sqrt{a+y^2} \Rightarrow y^2 = a + y^2$

$\Rightarrow g_a'(y) \leq 0 \Rightarrow \sin\frac{\pi x^2}{\sqrt{x^2+n^2}+n}$ je pro pevné x monotónní.

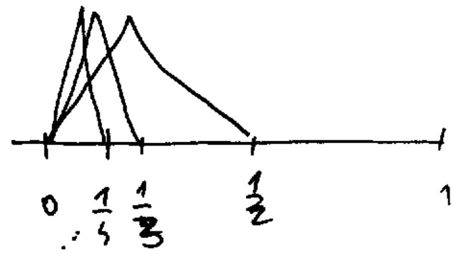
$\Rightarrow$ řada konv. stejn. podle Dirichleta

$\rightarrow$ nekonv. abs. stejn. protože nekonv. absolutně

$\rightarrow$

Bonus:

Vezmi protipuntl. příkl.: $f_1, \dots, f_n$



Uspořádej rac. čísla do posl. $\{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$

Def: $g_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_n(x + q_k) \cdot \frac{1}{2^k}$

pro pevné x: $g_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

pro $\varepsilon > 0$ najdu n_0 tak, aby $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$

~~pro čísla~~ def. $d = \sup_{k=1,\dots,n_0} |x - q_k|$ a najdu n_1 tak, aby $d > \frac{1}{n_1}$

potom $|g_n(x)| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{n_0}} \leq \varepsilon$

tedy $g_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Zároveň $g_n \not\rightrightarrows 0$ na žádném ot. J intervalu, protože v každém J leží rac. č. q_k ... g_n a tedy $\sup_J g_n \geq \frac{1}{2^k}$.