- DÚ 8
- Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí!

a) $\sqrt[n]{n}\,(1-x)^n$

b) $\dfrac{x^n}{1+x^n}$

c) $\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

d) $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$

DÚ 8

1) $\boxed{\sqrt[n]{n}\,(1-x)^n = f_n(x)}$

1) Bodová konvergence: $f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ pro $(0,2) \ni x$

$\longrightarrow 1$ pro $x = 0$

$\longrightarrow +\infty$ $x < 0$

diverguje $x \geq 2$

2) Stejnoměrná konvergence může být pouze na intervalech, které neobsahují 0, 2.

Ukážeme st. konvergenci na $(\delta, 2-\delta)$ pro $\delta \in (0,1)$:

$$|\sqrt[n]{n}(1-x)^n - 0| \leq \sqrt[n]{n}\cdot|(1-\delta)|^n \longrightarrow 0.$$

Na $[0,2]$ nemůže být st. konvergence protože, f_n jsou spojité, ale limita není. Na $(0,2)$ nemůže f_n st. konvergovat, protože pak by st. konvergovala na $[0,2]$; (f_n spojité na $[0,2]$).

$$\boxed{f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}}$$

$f_n \xrightarrow{n\to+\infty}$ 0 $x \in (-1,1)$

$\frac{1}{2}$ $x = 1$

neex. $x = -1$

1 $x \in (1,+\infty) \cup (-\infty,-1)$

St. konvergence: na $(-1+\delta, 1-\delta)$: $(\delta \in (0,1))$

$$|f_n(x) - 0| \leq \frac{(1-\delta)^n}{1-(1-\delta)^n} \longrightarrow 0$$

na $(-\infty, -1-\delta) \cup (1+\delta, +\infty)$: $(\delta > 0)$

$$|f_n(x) - 1| = \left|\frac{1}{1+x^n}\right| \leq \frac{1}{(1+\delta)^n - 1} \longrightarrow 0$$

St. konvergence není na: $[-1,1]$ a na $[1,+\infty)$, $(-\infty,-1]$ (spojitost)

$$\boxed{\frac{nx}{1+n^2x^2} = f_n(x) \qquad x\in\mathbb{C}}$$

__Bodová konvergence:__ $\quad f_n(x) = \dfrac{x}{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + n x^2}$

$$|f_n(x)| = \frac{n|x|}{|1+n^2x^2|} \le \frac{n|x|}{n^2|x|^2-1} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } n\to\infty$$

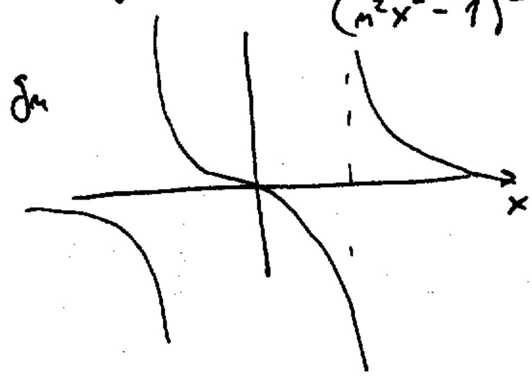
$$f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad \text{pro } x\in\mathbb{C}$$

__Stejnoměrně:__

$$|f_n(x)| \le \frac{n|x|}{n^2|x|^2-1}$$

Jak vypadá $g_n(x) := \dfrac{nx}{n^2x^2-1}$?

$$g_n'(x) = \frac{n(n^2x^2-1) - nx\cdot 2n^2x}{(n^2x^2-1)^2} = \frac{-n-n^3x^2}{(n^2x^2-1)^2} < 0 \quad \text{pro } n>0,\ x^2\neq\frac{1}{n^2}$$



Tedy pokud $|x| > \delta > \frac{1}{n}$ platí!

$$|f_n(x)| \le \frac{n\delta}{n^2\delta^2-1} \quad \text{a tedy}$$

$$f_n \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{na } \mathbb{C}\setminus U_\delta(0).$$

Na $\mathbb{C}$ nel. st. protože v $x_n = \frac{1}{n}$ je $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$.

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} e^x \qquad x \in \mathbb{R}$$

Stejnoměrně: na $(-\infty, 0)$ nemůže být stejn. konv. protože $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x\right| = +\infty$

podobně na $(0, +\infty)$

na $[-K, K]$:

$$|f_n(x) - e^x| = \left| e^{n\cdot\lg\left(1+\frac{x}{n}\right)} - e^x \right| =$$

$$= e^x \cdot \left| e^{n\cdot\lg\left(1+\frac{x}{n}\right) - x} - 1 \right| \le e^K \left| e^{n\cdot\lg\left(1+\frac{x}{n}\right) - x} - 1 \right|$$

A stačí ukázat:

$$n\cdot\lg\left(1+\frac{x}{n}\right) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} x \text{ na } [-K, K],$$

~~Ale~~ spočtěme průběh fce $g_n(x) := n\cdot\lg\left(1+\frac{x}{n}\right) - x$ na $[-K, K]$

$$g_n'(x) = n \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{n}} \cdot \frac{1}{n} - 1 = \frac{n}{x+n} - \frac{(x+n)}{x+n} = \frac{-x}{x+n}$$

pro $-x \neq n$

Teď vidíme, že pro $n > K$ ex. lok. bod $x = 0$ a

$g_n(0) = 0$; $g_n(K) = n\cdot\lg\left(1+\frac{K}{n}\right) - K$.

$g_n(-K) = n\cdot\lg\left(1-\frac{K}{n}\right) + K$

Teď $\sup\limits_{[-K,K]} g_n(x) = \max\limits_{[-K,K]} g_n(x) = \max\left(\left|n\cdot\lg\left(1+\frac{K}{n}\right) - K\right|, \left|n\lg\left(1-\frac{K}{n}\right) + K\right|\right) = A_n$

Protože $\lim\limits_{y\to0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$ je vidět, že

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = 0 \Rightarrow g_n \rightrightarrows 0 \text{ na } [-K, K] \Rightarrow f_n \rightrightarrows e^x \text{ na } [-K, K]$$

Kde jsme použili, že $x > -K$?