DÚG - MAF035

29) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lg n)^{100}}{n} \sin\frac{\pi n}{4} = (\check{R})$

a) $\exists c>0: \forall N \in \mathbb{N}: \left|\sum_{n=1}^{N} \sin\frac{\pi n}{4}\right| < c$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\lg n)^{100}}{n} = 0$

c) $f(x) := \frac{(\lg(x))^{100}}{x}$ je klesající pro $x > x_0 = e^{100}$ protože

$$f'(x) = \frac{100(\lg x)^{99}}{x^2} - \frac{1}{x^2}(\lg x)^{100} = \frac{(\lg x)^{99}}{x^2}(100 - \lg x)$$

$\Rightarrow$ $(\check{R})$ konverguje podle Dirichletova kritéria

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(\lg n)^{100}}{n}\right| \left|\sin\frac{\pi n}{4}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

$$a_n \geq \frac{(\lg n)^{100}}{n} \qquad n = 4k+2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lg(4k+2)}{4k+2} = +\infty$$ $\Rightarrow$ řada nek. absolutně

33) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ K $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

Abelovo kr.

$\frac{n-1}{n+1} \longrightarrow 1$ pro $n \to +\infty$

a je navíc monotónní!

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ konverguje podle Dirichletova kr. $\left(\frac{1}{\sqrt[100]{n}} \searrow 0 \right.$, $\left|\sum_{n=1}^{N} (-1)^n\right| \leq 10$ je omezen

Řada nekonverguje absolutně:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \cdot \frac{n-1}{n+1} \; K \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \; K,$$ tato řada diverguje

30) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\lg\lg n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \cos\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n}\cos n}{\lg\lg n}$$

Konverguje podle: $\sum \frac{\sin n \cos\frac{1}{n}}{\lg\lg n} \; K \iff \sum \frac{\sin n}{\lg\lg n} \; K$

Abel $\cos\frac{1}{n} \nearrow 1 \quad n \to +\infty$

$\sum \frac{\sin n}{\lg\lg n} \; K$ ~~podle~~ podle Dirichletova kr. podmínky

a) $\exists C>0 : \forall N \in \mathbb{N} : \left|\sum_{n=1}^{N} \sin n\right| < C$

b) $(\lg\lg n)^{-1} \searrow 0$

druhá řada podobně

Řada nekonverguje absolutně:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\sin(n+\frac{1}{n})|}{\lg\lg n} \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin^2(n+\frac{1}{n})}{\lg\lg n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1-\cos(2n+\frac{2}{n})}{2\lg\lg n}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2\lg\lg n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(2n+\frac{2}{n})}{2\lg\lg n}$$

$\hookrightarrow$ konverguje podobně jako nahoře

$\hookrightarrow$ diverguje.

32) $(\tilde{R}) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\lg^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos\left(\pi n\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \cdot \frac{1}{\lg^2 n}$

$\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n\right) = (-1)^n \cdot \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$

$\cos\left(\pi \frac{n}{n+1} - \pi\right) = - \cos \pi \frac{n}{n+1}$

$(\tilde{R}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{\lg^2 n} \quad K \Leftrightarrow \left(\text{Abel: } \cos \frac{\pi}{n+1} \nearrow 1 \atop n \to +\infty\right)$

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\lg^2 n} \quad K$

konverguje podle Dirichleta: $\left|\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}\right| < 10$

$\frac{1}{\lg^2 n} \searrow 0$

řada nekonverguje absolutně.

38) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}\right)^p$

už víme, že řada konverguje abs. pro $p > 2$

pro $p \leq 0$ není splněna nutná podmínka konvergence řady

def. $\left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}\right)^p = a_n$, a) a_n je monotónní posl.

b) $a_n \to 0$? ano, jinak by nebyla možná absolutní konvergence pro $p > 2$.

$\Rightarrow$ řada konverguje pro $p \in (0, +\infty)$

pro $p \in (2, +\infty)$ absolutně.