DÚ 5

Ř/6 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konverguje podle srovnávacího k.

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \qquad n \in \mathbb{N}$$

, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ diverguje podle srovnávacího k.

$$\frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{1}{n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$ diverguje podle sr. k.

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} > \frac{\pi}{4n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Ř/8 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\lg n)^{\lg n}}$ Konverguje podle srovnávacího kritéria ↓

$$\frac{1}{(\lg n)^{\lg n}} = \frac{1}{\exp(\lg n \lg \lg n)} = \frac{1}{n^{\lg \lg n}} \qquad n > e^{(e^3)}$$

$$\frac{1}{n^{\lg \lg n}} < \frac{1}{n^3} \qquad n > e^{(e^3)}$$

Ř/16 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)^n}$

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)^3}} \longrightarrow \frac{3}{\pi} < 1 \Rightarrow$$ řada konverguje podle odmocninového k.

Ē/21) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(p+1)\quad(p+n-1)}{n!}\, n^{-q} \qquad p, q \in \mathbb{R}$

a) $p \in \{0, -1, \dots\} \Rightarrow$ řada konverguje

b) $p = 1 \qquad \Rightarrow$ (řada konverguje $\Leftrightarrow q > 1$)

$p < 1,\ q > 1$ řada konverguje podle srovnávacího kr.

c) $p = 2$

$$\frac{p(p+1)\quad(p+n-1)}{n!} \cdot n^{-q} = (n+1)\, n^{-q}$$

$\Rightarrow$ (řada konverguje $\Leftrightarrow q > 2$)

$p < 2\ ;\ q > 2$ řada konverguje podle srovnávacího kr.

$\Rightarrow$ Hypotéza $q - p > 0 \Rightarrow$ řada konverguje

d) Raabe Raabe:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{p+n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^q$$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\, \frac{(n+1)(n+1)^q - (p+n)\, n^q}{p+n\ (n^q)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{p+\frac{1}{x}} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^q}{\left(\frac{1}{x}\right)^q} - 1\right] =$$

pokud lim

spojité ex.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\left(\frac{x+1}{px+1} \cdot \left(\frac{x+1}{1}\right)^q - 1\right)$$

$$\stackrel{l'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(q+1)(1+x)^{q}(px+1) - p(x+1)^q}{(px+1)^2} = q+1-p$$

Tedy pokud $q+1-p > 1 \Leftrightarrow q > p$ řada konverguje podle Raabe

pokud $q < p$ řada diverguje podle Raabe.

Jak je to pro $q = p$?