DÚ – 4 MAF034

5/4 $y'' - 3y' + 2y = \sin x$

Charakter. polynom: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

Tedy Char. systém je: $e^x ; e^{2x}$

pravá strana má speciální tvar: $\pm i$ není kořen charakteristického polynomu

partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y(x) = A \sin x + B \cos x \qquad / \cdot 2$$
$$y'(x) = A \cos x + (-B) \sin x \qquad / \cdot (-3)$$
$$y''(x) = -A \sin x - B \cos x \qquad / \cdot 1$$

$$y'' - 3y' + 2 = A(2\sin x - 3\cos x - \sin x) + B(2\cos x + 3\sin x - \cos)$$
$$= A(\sin x - 3\cos x) + B(\cos x + 3\sin x)$$
$$= \sin x (A + 3B) + \cos x (B - 3A)$$

se má rovnat $= \sin x$

tedy
$$A + 3B = 1 \qquad / \cdot 3$$
$$-3A + B = 0 \qquad / \cdot (-3)$$
$$10B = 3 \Rightarrow B = \frac{3}{10}$$
$$10A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{10}$$

Obecné řešení: $y(x) = \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x + \alpha e^x + \beta e^{2x}$ na $\mathbb{R}$

pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

38:

4/8 $\quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \qquad x \neq 0!$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = 1$

charakteristický systém: $e^x,\ x e^x$

pravá strana není spec. tvar. $\implies$ variace konstant.

$$y(x) := A(x) e^x + B(x)\, x e^x$$

$$y'(x) = \underbrace{A'(x) \cdot e^x + B'(x) \cdot x e^x}_{\text{polož } = 0} + A(x) (e^x)' + B(x) (x e^x)'$$

$$y''(x) = \underbrace{A'(x) (e^x)' + B'(x) (x e^x)'}_{= \frac{e^x}{x}} + A(x) (e^x)'' + B(x) (x e^x)''$$

po dosazení do rovnice zmizí, protože $e^x$ a $x e^x$ jsou (E1) řešení hom. rovnice.

$$A'(x) \cdot e^x + B'(x)\, x e^x = 0$$

$$A'(x)\, e^x + B'(x)\, e^x (1+x) = \frac{e^x}{x}$$

$$B'(x)\, e^x (1 + x - x) = \frac{e^x}{x} \implies B'(x) = \frac{1}{x}$$

z 1. rovnice: $A'(x)\, e^x = -x e^x B'(x) = -e^x \implies A'(x) = -1$

$\implies B(x) = \lg|x| \ ; \ A(x) = -x$

Tedy obecné řešení: $-x e^x + \lg|x|\, x e^x + \alpha e^x + \beta x e^x$

na $(-\infty, 0)$ $\forall$ a nebo na $(0, +\infty)$ pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Zk:

5/13

$x y'' + 2y' - xy = 0$ • jedno řešení je $\frac{e^x}{x} = y_0(x)$

je to opravdu řešení? $(y_0)' = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

$$y_0'' = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2\frac{1}{x^3}\right) = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$$

ANO ✓

Druhé řešení hledáme ve tvaru: $y(x) = w(x) \cdot y_0(x)$

$y'(x) = w' y_0 + w y_0'$

$y''(x) = w'' y_0 + 2w' y_0' + w y_0''$

po dosazení do rovnice zmizí, protože $y_0$ je řešení

$w''(x y_0) + 2x w' y_0' + 2w' y_0 = 0$

$$w''(e^x) + w'\underbrace{(2x y_0' + 2y_0)}_{2\cdot\left(e^x\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{e^x}{x}\right) = 2e^x} = 0$$

$w'' + 2w' = 0$ protože $e^x > 0$.

integ. faktor je $e^{2x}$

$(w' e^{2x})' = w'' e^{2x} + w' 2 \cdot e^{2x} = 0$

$w' = C e^{-2x} \Rightarrow w = D e^{-2x}$

Hledané druhé řešení je: $\frac{e^{-x}}{x} = y_1$

Zk.:

$y_1' = e^{-x}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

$y_1'' = e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$

$= e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$ ✓

Obecné řešení je tedy: $\frac{1}{x}\left(\alpha e^{-x} + \beta e^{x}\right)$ na $(0, +\infty)$ nebo na $(-\infty, 0)$

pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Lze tato řešení prodloužit přes 0?

Použijme $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0} A(1+x+o(x)) + B(1-x+o(x))\cdot\frac{1}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{A+B}{x} + A - B + o(x)$ a tato limita existuje

pokud $A=-B$.

Pro $A=-B$

$$y(x) = A\,\frac{e^{x}-e^{-x}}{x} = A\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n}\left(\frac{1}{n!} - (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right)\cdot x.$$

Tedy $y$ má v $0$ všech derivace spojitě dodefinovatelné, proto

$$y(x) = \begin{cases} A\,\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x} & x\neq 0 \\ 2A & x = 0 \end{cases}$$ je řešení na $\mathbb{R}$ $\forall A\in\mathbb{R}$

Jiná řešení na celém $\mathbb{R}$ neexistují?