DÚ MA1035 − 3

3/2 $\quad y' - 2\frac{y}{x} = x^3$

integ. faktor: $\exp\left(\int -\frac{2}{x}\,dx\right) = \frac{1}{x^2}$

$$y'\cdot\frac{1}{x^2} - 2\frac{y}{x^3} = x$$

$$\left(y\frac{1}{x^2}\right)' = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)'$$

$\Rightarrow y(x) = \frac{x^4}{2} + Cx^2$ na $(0,+\infty)$ nebo $(-\infty,0)$ pro $C\in\mathbb{R}$

! prodloužení na $x=0$ nedovolí rovnice !

Zk: $y' = 2x^3 + 2Cx$

$2\frac{y}{x} = x^3 + 2Cx$

$+x^3 = 2x^3 + 2Cx$ ✓

3/5 $\quad xy' + y = \lg x + 1$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}\lg x + \frac{1}{x}$$

integr. faktor: $\exp\left(\int \frac{1}{x}\,dx\right) = x$ pro $x>0$

$$(xy)' = xy' + y = (x + x(\lg x - 1) + C)'$$

$$\int 1\cdot\lg x\,dx = x\lg x - \int 1 = x(\lg x - 1) + C \text{ na } x>0$$

$\int d: x \quad \downarrow d: \frac{1}{x}$

$\Rightarrow xy = x\lg x + C \Rightarrow y(x) = \lg x + \frac{C}{x}$ na $(0,+\infty)$ pro $C\in\mathbb{R}$

3/11

$xy' + y = y^2 \ln x \quad ; \quad y(1) = 1$

$(-1)(-1)\underbrace{y' y^{-2}}_{(y^{-1})'} + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln x}{x} \qquad x > 0$

$-(y^{-1})' + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln x}{x} \qquad x > 0$

$(y^{-1})' - \frac{1}{x} y^{-1} = -\frac{\ln x}{x}$

integr. faktor: $\exp\left(-\int \frac{1}{x}dx\right) = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$

$\underbrace{\frac{(y^{-1})'}{x} - \frac{1}{x^2} y^{-1}}_{} = -\frac{\ln x}{x^2}$

$\left(\frac{y^{-1}}{x}\right)' = \left(C + \frac{1}{x}(\ln x + 1)\right)'$

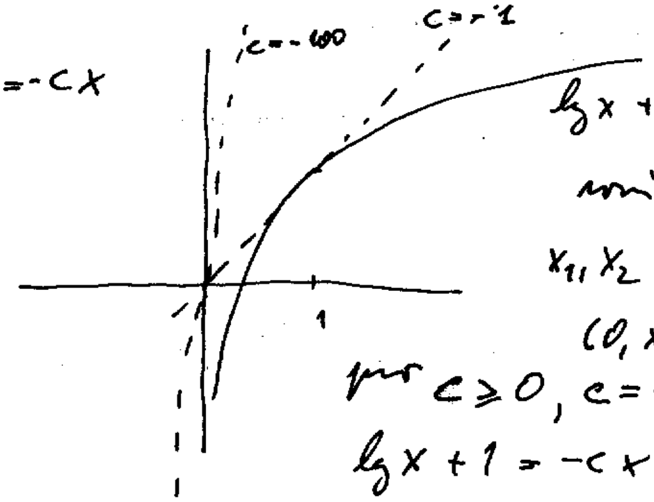
$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}(\ln x + 1)$

$d: \frac{1}{x} \qquad i: -\frac{1}{x}$

$y^{-1} = \ln x + 1 + Cx$

$y(x) = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$

$\ln x + 1 = -Cx$

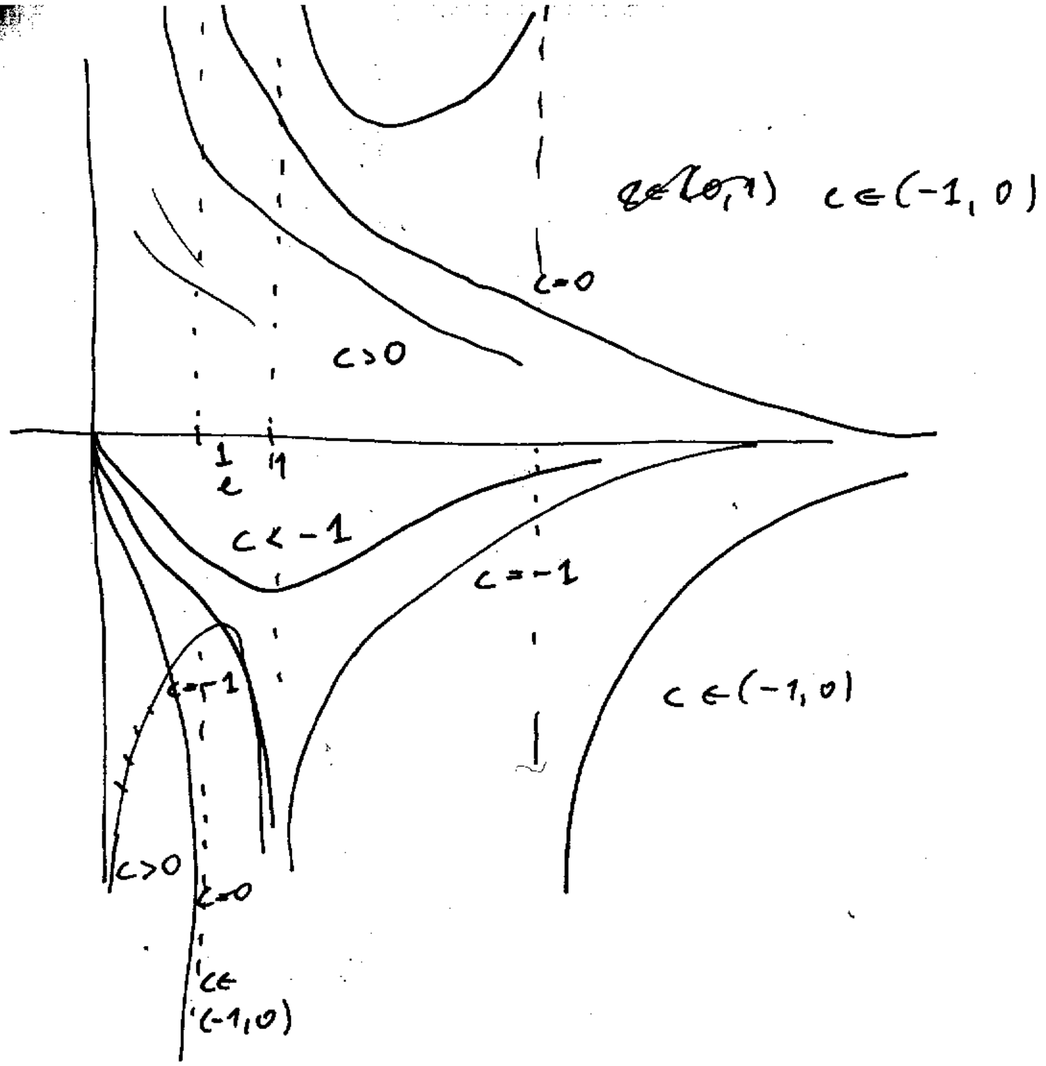


na $(0, +\infty)$ pro $c < -1$

$\ln x + 1$ pro $c \in (-1, 0)$ existují 2 řešení rovnice $\ln x + 1 = -Cx$, označme je x_1, x_2 a řešení máme na $(0, x_1)$ nebo (x_1, x_2) nebo $(x_2, +\infty)$

pro $c \geq 0$, $c = -1$ existuje 1 řešení rovnice x_3 $\ln x + 1 = -cx$ a řešení tedy je na $(0, x_3)$ nebo $(x_3, +\infty)$

$+ y(x) = 0$ je také řešení na $(0, +\infty)$



$y(1) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+c} = 1 \Rightarrow 1 = 1 + c \Rightarrow c = 0$

Tedy hledané řešení je $y(x) := \dfrac{1}{1+\ln x}$ na $(e^{-1}, +\infty)$.

5/12 $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$

$\underbrace{(-\tfrac{1}{2})(-2)y' y^{-3}} - x y^{-2} = -e^{-x^2}$

$(-\tfrac{1}{2})(y^{-2})' - x y^{-2} = -e^{-x^2}$

$(y^{-2})' + 2x y^{-2} = +2e^{-x^2}$

integr. faktor: $\exp(\int 2x\,dx) = e^{x^2}$

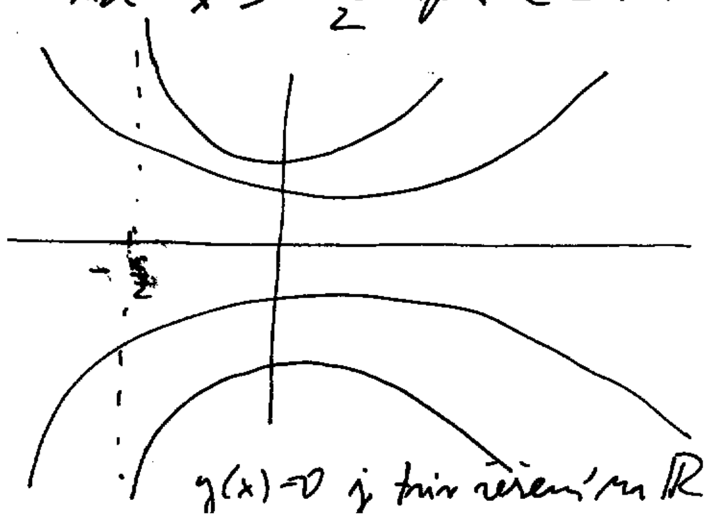
$e^{x^2}(y^{-2})' + 2x e^{x^2} y^{-2} = 2$

$(e^{x^2} y^{-2})' = (2x + c)'$

$y^{-2} = 2x e^{-x^2} + c e^{-x^2}$

$y(x) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{2x+c}}$

na $x > -\frac{c}{2}$ pro $c \in \mathbb{R}$



$y(x) = 0$ je triv. řešení na $\mathbb{R}$.