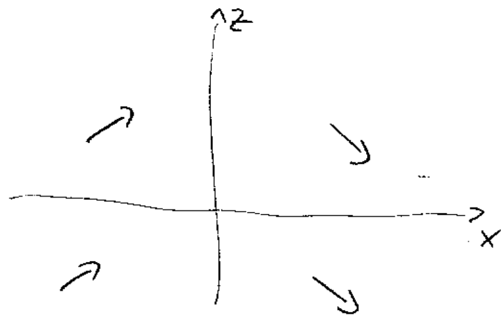
DÚ - 2 (2/18, 2/21, 2/24)

$y' = \frac{y}{x} - e^{y/x}$ $\qquad z = \frac{y}{x}$ $\qquad y' = xz' + z$

$xz' = \cancel{z} - e^z - z$

$xz' = -e^z$

$z' = -\frac{e^z}{x}$



Separace:

$\frac{z'}{e^z} = -\frac{1}{x}$

Integrace: $(-e^{-z})' = (-\lg|x| + c)'$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

$e^{-z} = \lg(c|x|)$ $\qquad c \in (0, +\infty)$

$! \quad c|x| > 1 \Rightarrow |x| > c^{-1}$

$-z = \lg\lg(c|x|)$

$z(x) = -\lg\lg(c|x|)$ na $(c, +\infty)$ nebo $(-\infty, -c)$ pro $c > 0$

$y(x) = -x\lg\lg(c|x|)$ na $(c, +\infty)$ nebo $(-\infty, -c)$ pro $c > 0$

jsou všechna řešení nebo [illegible]

1) každým bodem (x_0, y_0) prochází nějaké řešení pokud $x_0 \neq 0$.

2) když $x_0 = 0$ nemůže procházet žádné řešení

3) řešení je jednoznačné

Pomocná rovnice: $t = e^t$ neumím řešit, ale nenastane nikdy:

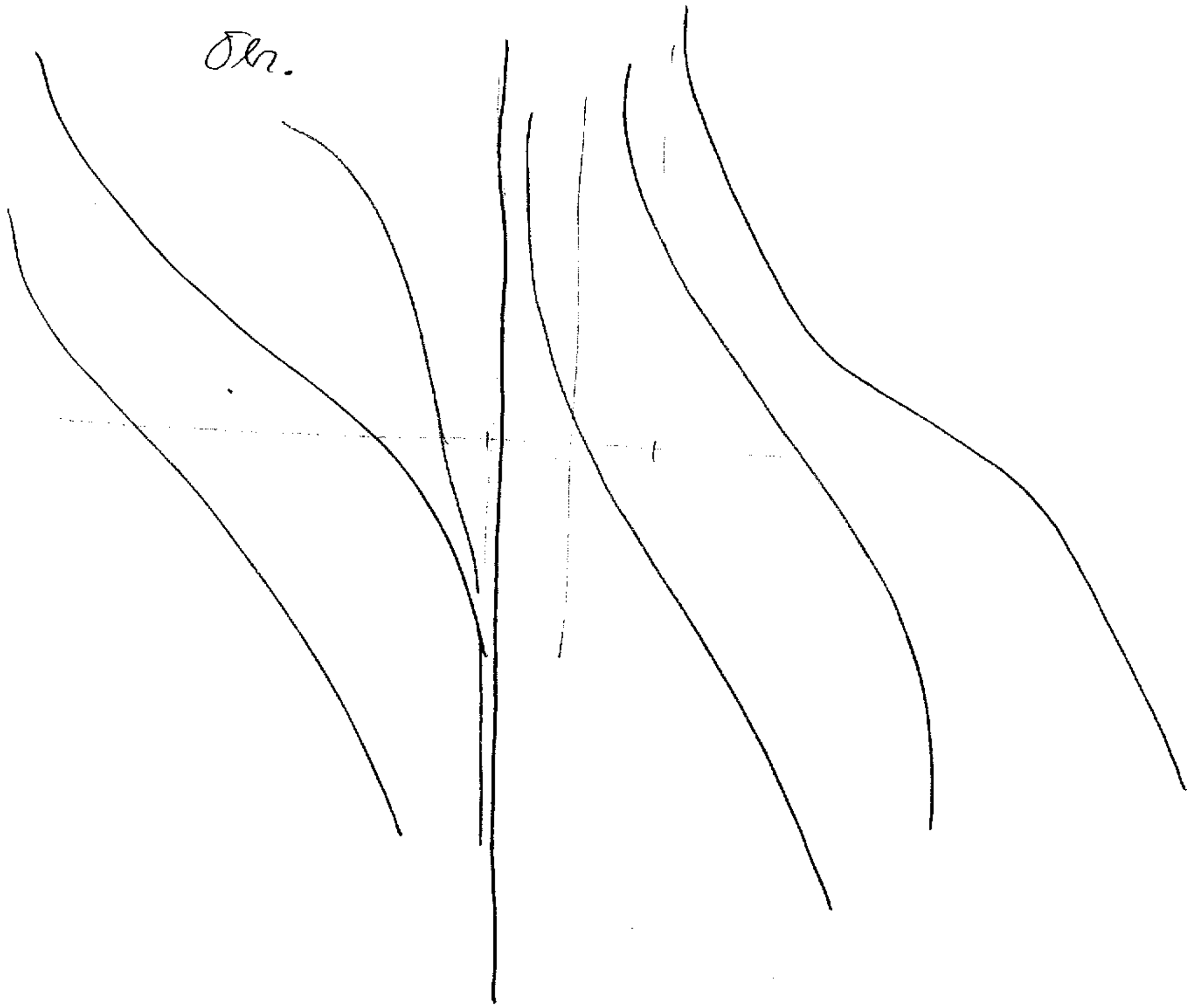
vždy $t < e^t \Rightarrow y' < 0$ řešení je vždy klesající!

Pr: $y(x) := -x \lg \lg (c|x|)$

$$y'(x) = -\lg \lg (c|x|) - x \frac{1}{\lg(c|x|)} \cdot \frac{1}{c|x|} \cdot \frac{cx}{|x|}$$

$$\frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}} = -\lg \lg (c|x|) + \frac{-1}{\lg(c|x|)} \quad \checkmark$$

Obr.



21 $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ $\qquad z = \frac{y}{x} \qquad xz = y$

$y' = xz' + z$

$xz' = -\frac{1}{z}$

Sep. $zz' = -\frac{1}{x}$

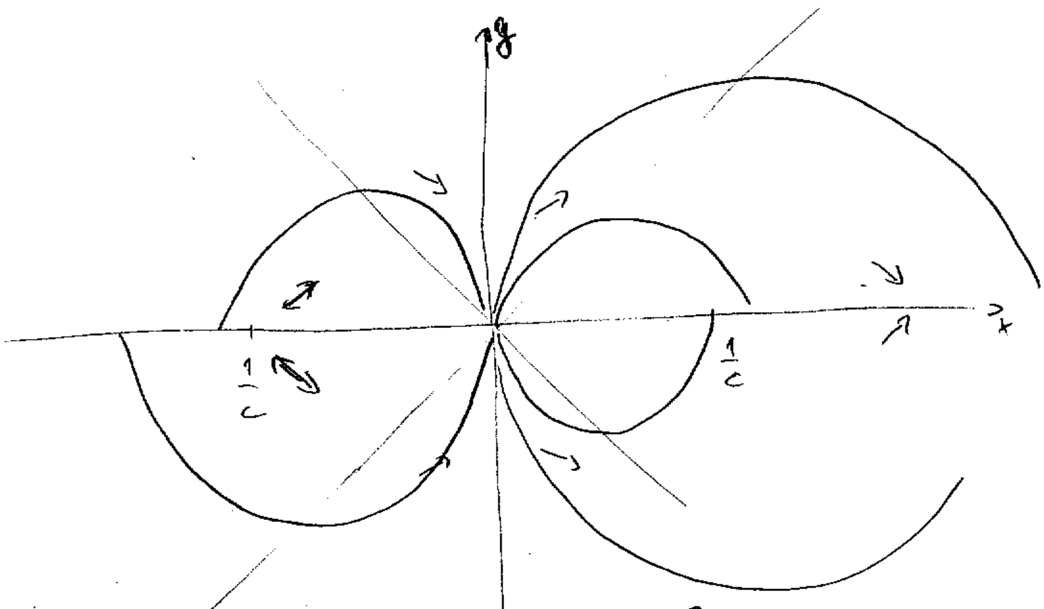
int. $\left(\frac{1}{2}z^2\right)' = -\lg(|x|c)' \qquad c > 0$

Inverse:

$\frac{1}{2}z^2 = -\lg(c|x|) \Rightarrow z^2 = -2\lg(c|x|) \qquad c|x| < 1;\ |x| < \frac{1}{c}$

$z(x) = \pm\sqrt{-2\lg(c|x|)}$ na $(0, \frac{1}{c})$ nebo $(-\frac{1}{c}, 0)$ pro $c > 0$

a tedy $y(x) = \pm x\sqrt{-2\lg(c|x|)}$ na $(0, \frac{1}{c})$ nebo $(-\frac{1}{c}, 0)$ pro $c > 0$ jsou všechna řešení, každým bodem (x_0, y_0); $x_0 \neq 0$ a $y_0 \neq 0$ prochází řešení.



Zkouška:

$$y'(x) = \pm\sqrt{-2\lg(c|x|)} \pm x \frac{-\frac{cx}{c|x|^2}}{\sqrt{-2\lg(c|x|)}}$$

$\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \quad$ —||—

✓

2/24 $y' = \dfrac{1}{x+y-2}$

$u(x) := x + y(x) - 2$

$u'(x) = 1 + y'(x)$

$u'(x) - 1 = \dfrac{1}{u}$

$u' = \dfrac{1}{u} + 1 = \dfrac{1+u}{u}$

Separace: $\dfrac{u u'}{1+u} = 1$

Integ.: $\left(1 - \dfrac{1}{1+u}\right)u' = \left(u - \lg|1+u|\right)' = (x + C)'$

$u - \lg|1+u| = x + C$

$x - 2 + y(x) - \lg|x + y(x) - 1| = x + C$

zadání implicitní řešení

Obr: