Písemná zkouška z Úvodu do funkcionální analýzy (E)
ZS 2015-2016

Příklad 1: [18 bodů] Nechť X je prostor $L^1([0,1]) \times L^2([0,1])$ opatřený normou

$$\|(f,g)\| = \max\{\|f\|_1, \|g\|_2\}, \quad f \in L^1([0,1]), g \in L^2([0,1]).$$

Definujme funkcionály $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ předpisem

$$\varphi_1(f,g) = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t, \quad \varphi_2(f,g) = \int_0^1 tg(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{a} \quad \varphi_3(f,g) = \varphi_1(f,g) + \varphi_2(f,g)$$

pro $f \in L^1([0,1])$ a $g \in L^2([0,1])$. Ukažte, že $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in X^*$, spočtěte jejich normy a určete, které z nich nabývají své normy a které nikoli.

Příklad 2: [17 bodů] Nechť X je prostor $\ell^1 \times \ell^2$ opatřený normou

$$\|(\mathbf{x},\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_2, \quad \mathbf{x} \in \ell^1, \mathbf{y} \in \ell^2.$$

Definujme $T : X \to X$ předpisem

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (-\mathbf{x},\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \ell^1, \mathbf{y} \in \ell^2$$

(i) Ukažte, že $T \in L(X)$.
(ii) Vyjádřete duální operátor $T' \in L(\ell^\infty \times \ell^2)$ s využitím standardní reprezentace duálů. (To, že duál X^* lze reprezentovat jako prostor $\ell^\infty \times \ell^2$ opatřený normou
$$\|(\mathbf{x},\mathbf{y})\| = \max\{\|\mathbf{x}\|_\infty, \|\mathbf{y}\|_2\}, \quad \mathbf{x} \in \ell^\infty, \mathbf{y} \in \ell^2,$$
nemusíte dokazovat. Stačí tento fakt využít.)
(iii) Rozhodněte, zda T je kompaktní.
(iv) Určete $\sigma_p(T)$ a $\sigma_p(T')$.
(v) Určete $\sigma(T)$ a vyjádřete rezolventní funkci T, tj. $(\lambda I - T)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

Příklad 3: Nechť $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Nechť Λ_1 značí regulární distribuci na $\mathbb{R}$ určenou funkcí konstantně rovnou jedné. Najděte všechny distribuce $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, které splňují rovnost $g \cdot U = \Lambda_1$.

Návod:

(a) [3 body] Nechť $\Lambda_{1/x}$ je distribuce definovaná vzorcem

$$\Lambda_{1/x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Ukažte, že distribuce $U_0 = -(\Lambda_{1/x})'$ splňuje uvedenou rovnost.

(b) [1 bod] Nechť $V \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ je (jiná) distribuce splňující uvedenou rovnost. Ukažte, že $g \cdot (V - U_0) = 0$.

(c) Nechť $W \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ splňuje $g \cdot W = 0$.

(c1) [2 body] Ukažte, že $\operatorname{spt} W \subset \{0\}$. (Použijte definici nosiče.)
(c2) [1 bod] Ukažte, že W je lineární kombinací distribucí $(\Lambda_{\delta_0})^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}_0$. (δ_0 je Diracova míra nesená bodem 0 a $U^{(j)}$ značí j-tou derivaci distribuce U; pro $j = 0$ je to sama distribuce U.) Použijte k tomu větu o vlastnostech nosiče distribuce.
(c3) [1 bod] Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ existuje $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ splňující $\varphi_n^{(n)}(0) \neq 0$ a $\varphi_n^{(k)} = 0$ pro $k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{n\}$. (Zvolte $\varphi_n(x) = x^n \varphi_0(x)$, kde $\varphi_0(x)$ je rovna jedné na okolí 0.)
(c4) [2 body] S využitím předchozího bodu ukažde, že distribuce $(\Lambda_{\delta_0})^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, jsou lineárně nezávislé, a tedy vyjádření z bodu (c2) je jednoznačné.
(c5) [2 body] Pro $n \in \mathbb{N}_0$ vyjádřete distribuci $g \cdot (\Lambda_{\delta_0})^{(n)}$ v co nejjednodušším tvaru. (Spočtěte, jakou hodnotu má na dané testovací funkci $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.)
(c6) [1 bod] S využitím výsledku (c5) vyjádřete $g \cdot W$, kde W má tvar z bodu (c2).
(c7) [1 bod] Najděte obecný tvar distribuce W. (Použijte body (c2), (c6) a (c4).)

(d) [1 bod] Najděte obecný tvar distribuce U splňující rovnici ze zadání. Použijte k tomu výsledky bodů (a), (b) a (c7).

Písemná zkouška z Úvodu do funkcionální analýzy (E)

ZS 2015-2016

Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledky: $\|\varphi_1\| = 1$, nenabývá se. $\|\varphi_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, nabývá se v bodě $(0, t \mapsto \sqrt{3} \cdot t)$. $\|\varphi_3\| = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, nenabývá se.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Linearita všech tří funkcionálů je zřejmá, pokud jsou dobře definovány. (Tj. pokud příslušné integrály konvergují, plyne z linearity integrálu.) [1 bod]
2) $|\varphi_1(f,g)| \leq \|f\|_1 \leq \|(f,g)\|$. Odtud plyne, že $\|\varphi_1\| \leq 1$. [1 bod]
3) Nechť $(f_n, g_n) = (n\chi_{[1-\frac{1}{n},1]}, 0)$. Pak $\|(f_n, g_n)\| = 1$ a $\varphi_1(f_n, g_n) \to 1$. Tedy $\|\varphi_1\| = 1$. [2 body]
4) Pokud $\|(f,g)\| = 1$ a $\varphi_1(f,g) = 1$, pak by ve všech nerovnostech ve výpočtu z bodu 2) musela nastávat rovnost. Odtud nejprve vidíme, že $\|f\|_1 = 1$, a z rovnosti $\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ pak plyne, že $t|f(t)| = |f(t)|$ skoro všude na $[0,1]$, tedy $f(t) = 0$ skoro všude, což je spor. [3 body]
5) Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti dostaneme $|\varphi_2(f,g)| \leq \|t \mapsto t^2\|_2 \cdot \|g\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\|g\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\|(f,g)\|$. Odtud plyne, že $\|\varphi_2\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. [2 body]
6) Norma se nabývá v bodě uvedeném ve výsledcích. Nalezneme ho díky tomu, že víme, kdy v Cauchy-Schwarzově nerovnosti nastává rovnost. [2 body]
7) Kombinací 2) a 5) vidíme, že $|\varphi_3(f,g)| \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{\sqrt{3}}\|g\|_2 \leq (1 + \frac{1}{\sqrt{3}})\|(f,g)\|$. Odtud plyne, že $\|\varphi_3\| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. [2 body]
8) O tom, že $\|\varphi_3\| = 1$, svědčí posloupnost (f_n, g), kde f_n jsou jako v bodě 3) a g je bod, kde φ_2 nabývá normy (viz bod 6). [2 body]
9) Pokud $\|(f,g)\| = 1$ a $\varphi_3(f,g) = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, pak by ve všech nerovnostech ve výpočtu z bodu 7) musela nastávat rovnost. Odtud vidíme, že nutně $\|f\|_1 = \|g\|_2 = 1$ a navíc $\varphi_1(f,g) = 1$ a $\varphi_2(f,g) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Proto by funkcionál φ_1 nabýval normy. To však není pravda dle bodu 4), tedy ani φ_3 své normy nenabývá. [3 body]

Příklad 2: Výsledky, postup a orientační bodové hodnocení:
(i) Protože pro každé $\mathbf{x} \in \ell^1$ platí $\mathbf{x} \in \ell^2$ a $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$, je T dobře definovaný a splňuje $\|T(\mathbf{x},\mathbf{y})\| = \|-\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{x}\|_2 \leq 2\|\mathbf{x}\|_1 \leq 2\|(\mathbf{x},\mathbf{y})\|$. Jelikož linearita T je zřejmá, dostaneme $T \in L(X)$ a $\|T\| \leq 2$. [2 body]
(ii) Z výpočtů $T'(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{e}_n, \mathbf{0}) = (\mathbf{x},\mathbf{y})(T(\mathbf{e}_n,\mathbf{0})) = (\mathbf{x},\mathbf{y})(-\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) = -x_n + y_n$ a $T'(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{0},\mathbf{e}_n) = (\mathbf{x},\mathbf{y})(T(\mathbf{0},\mathbf{e}_n)) = (\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$ vidíme, že $T'(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (-\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{0})$ pro $\mathbf{x} \in \ell^\infty$, $\mathbf{y} \in \ell^2$. [4 body]
(iii) T není kompaktní. Například posloupnost $((\mathbf{e}_n, \mathbf{0}))_{n=1}^\infty$ je omezená v X a pro $m \neq n$ platí $\|T(\mathbf{e}_n,\mathbf{0}) - T(\mathbf{e}_m,\mathbf{0})\| = \|(\mathbf{e}_m - \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m)\| = 2 + \sqrt{2}$. Proto z posloupnosti $(T(\mathbf{e}_n,\mathbf{0}))_{n=1}^\infty$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost. [3 body]
(iv-1) $\sigma_p(T) = \{-1, 0\}$. Vlastní vektory k vlastnímu číslu -1 jsou $(\mathbf{x}, -\mathbf{x})$, $\mathbf{y} \in \ell^1 \setminus \{0\}$. Vlastní vektory k vlastnímu číslu 0 jsou $(\mathbf{0}, \mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \ell^2 \setminus \{0\}$. Jiná vlastní čísla nejsou. To se zjistí přímočarým řešením patřičných rovnic. [3 body]
(iv-2) $\sigma_p(T') = \{-1, 0\}$. Vlastní vektory k vlastnímu číslu -1 jsou $(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, $\mathbf{x} \in \ell^\infty \setminus \{0\}$. Vlastní vektory k vlastnímu číslu 0 jsou $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \ell^2 \setminus \{0\}$. Jiná vlastní čísla nejsou. Výpočet je téměř stejný jako pro T. [2 body]
(v) $\sigma(T) = \{-1, 0\}$, $(\lambda I - T)^{-1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\frac{1}{\lambda+1}\mathbf{u}, \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\mathbf{u} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{v})$, $\mathbf{u} \in \ell^1$, $\mathbf{v} \in \ell^2$. Spočte se to přímočarým řešením patřičných rovnic. [3 body]

Příklad 3: Výsledky a postup řešení:

(a) Distribuci U_0 lze vyjádřit vzorcem $U_0(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. Dosazením do definice násobku $g \cdot U_0$ a použitím integrace per partes vyjde $g \cdot U_0(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi = \Lambda_1(\varphi)$.
(b) Z definic snadno plyne, že $g \cdot (V - U_0) = g \cdot V - g \cdot U_0 = 0$.
(c1) Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{spt}\varphi \not\ni 0$. Pak funkce $\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{x^2}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ patří do $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, a tedy $W(\varphi) = W(g \cdot \psi) = (g \cdot W)(\psi) = 0$. Z definice nosiče je tedy $\operatorname{spt} W \subset \{0\}$.
(c2) Tvrzení přímo plyne z věty o vlastnostech nosiče distribuce (Věta IV.17(d) z přednášky).
(c3) Pokud φ_0 je rovna jedné na okolí 0, pak $\varphi_0(0) = 1 \neq 0$ a φ_0' je nulová na okolí nuly, tedy pro $n = 0$ tvrzení platí. Dále lze postupovat například indukcí. Pokud φ_n má požadovanou vlastnost, pak $\varphi_{n+1}(x) = x\varphi_n(x)$ také, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $\varphi_{n+1}^{(k)}(x) = x\varphi_n^{(k)}(x) + \varphi_n^{(k-1)}(x)$, tedy speciálně $\varphi_{n+1}^{(k)}(0) = \varphi_n^{(k-1)}(0)$. Tedy i φ_{n+1} má požadovanou vlastnost.
(c4) Nechť $\sum_{j=0}^n \alpha_j (\Lambda_{\delta_0})^{(j)} = 0$. Pak pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ platí $\sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_j \varphi^{(j)}(0) = 0$. Aplikací na funkce $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ z předchozího bodu dostaneme, že $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Odtud plyne lineární nezávislost uvedených distribucí.
(c5) $g\cdot(\Lambda_{\delta_0})^{(j)}(\varphi) = (\Lambda_{\delta_0})^{(j)}(g\cdot\varphi) = (-1)^j \Lambda_{\delta_0}((g\cdot\varphi)^{(j)}) = (-1)^j (g\cdot\varphi)^{(j)}(0)$. Platí $(g\cdot\varphi)(0) = 0$, $(g\cdot\varphi)'(0) = (x^2\varphi'(x) + 2x\varphi(x))_{x=0} = 0$ a pro $j \geq 2$ je $(g\cdot\varphi)^{(j)}(0) = (x^2\varphi^{(j)}(x) + jx\varphi^{(j-1)}(x) + \binom{j}{2}\varphi^{(j-2)}(x))_{x=0} = \binom{j}{2}\varphi^{(j-2)}(0)$. Tedy, $g \cdot (\Lambda_{\delta_0})^{(j)} = \binom{j}{2} \cdot (\Lambda_{\delta_0})^{(j-2)}$
(c6) Pokud $W = \sum_{j=0}^n \alpha_j (\Lambda_{\delta_0})^{(j)}$, pak z bodu (c5) plyne $g \cdot W = \sum_{j=2}^n \alpha_j \binom{j}{2} (\Lambda_{\delta_0})^{(j-2)}$.
(c7) Má-li být $g \cdot W = 0$, pak z vyjádření v bodě (c6) a z lineární nezávislosti ukázané v bodě (c4) plyne, že $\alpha_j = 0$ pro $j \geq 2$. Tedy $W = \alpha_0 \Lambda_{\delta_0} + \alpha_1 \Lambda_{\delta_0}'$, kde α_1, α_2 jsou konstanty.
(d) Obecný tvar je $U = U_0 + \alpha_0 \Lambda_{\delta_0} + \alpha_1 \Lambda_{\delta_0}'$, kde U_0 je distribuce z bodu (a) a α_1, α_2 jsou konstanty.