Písemná zkouška z Úvodu do funkcionální analýzy (D)
ZS 2015-2016

Příklad 1: Nechť $X = L^1([-1,1],\mathbb{C})$. Pro $f \in X$ definujme funkci Tf předpisem

$$Tf(t) = \int_{-1}^{1} f(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}x, \quad t \in [-1,1].$$

(i) [14 bodů] Ukažte, že $T \in L(X)$, T je kompaktní, vyjádřete $T' \in L(L^\infty([-1,1]))$ pomocí standardní reprezentace duálů a spočtěte $\|T\|$.
(ii) [4 body] Ukažte, že T nenabývá své normy.

Návod:

(a) Ukažte, pro každé $f \in X$ je Tf spojitá funkce na $[-1,1]$ a pomocí Arzelà-Ascoliovy věty ukažte, že operátor $T_1 : f \mapsto Tf$ je kompakní jakožto operátor $X \to \mathcal{C}([-1,1])$. (K tomu se hodí si uvědomit, že funkce $t \mapsto |e^{it} - 1|$ je klesající na $[-\pi,0]$ a rostoucí na $[0,\pi]$.)
(b) Ukažte, že $T = T_2T_1$, kde T_1 je operátor z (a) a $T_2 \in L(\mathcal{C}([-1,1]), X)$ je vhodný operátor a z toho odvoďte, že T je kompaktní.
(c) Vyjádřete T' a spočtěte jeho normu. (Ukažte, že T' své normy nabývá.)
(d) Z bodu (c) odvoďte hodnotu $\|T\|$.
(e) Při důkazu, že T nenabývá své normy, můžete použít následující tvrzení: *Neexistují funkce α,β jedné proměnné a množina $A \subset [-1,1]$ kladné míry, že pro skoro všechna $t \in [-1,1]$ platí $e^{-itx} = \alpha(t)\cdot\beta(x)$ pro skoro všechna $x \in A$.*

Příklad 2: [17 bodů] Nechť X je prostor $L^1([0,1]) \times L^2([0,1])$ opatřený normou

$$\|(f,g)\| = \|f\|_1 + \|g\|_2, \quad f \in L^1([0,1]), g \in L^2([0,1])$$

Definujme $T : X \to X$ předpisem

$$T(f,g) = (g,g), \quad f \in L^1([0,1]), g \in L^2([0,1])$$

(i) Ukažte, že $T \in L(X)$.
(ii) Vyjádřete duální operátor $T' \in L(L^\infty([0,1]) \times L^2([0,1]))$ s využitím standardní reprezentace duálů.
(To, že duál X^* lze reprezentovat jako prostor $L^\infty([0,1]) \times L^2([0,1])$ opatřený normou
$$\|(f,g)\| = \max\{\|f\|_\infty, \|g\|_2\}, \quad f \in L^\infty([0,1]), g \in L^2([0,1]),$$
nemusíte dokazovat. Stačí tento fakt využít.)
(iii) Rozhodněte, zda T je kompaktní.
(iv) Určete $\sigma_p(T)$ a $\sigma_p(T')$.
(v) Určete $\sigma(T)$ a vyjádřete rezolventní funkci T, tj. $(\lambda I - T)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

Příklad 3: Nechť p je funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathbb{R}$. Najděte všechny distribuce $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, které splňují

$$U' + p \cdot U = \Lambda_{\delta_0}.$$

(δ_0 je Diracova míra nesená bodem 0, $p\cdot U$ je distribuce, která je součinem funkce p a distribuce U.)

Návod:

(a) [2 body] Označme symbolem P primitivní funkci k p, která splňuje $P(0) = 0$. Pomocí funkce P vyjádřete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + py = 0$.
(b) [5 bodů] Nalezněte jednu distribuci U_0 splňující rovnici ze zadání (tj. splňující $U_0' + p\cdot U_0 = \Lambda_{\delta_0}$) ve tvaru $U_0 = \Lambda_f$, kde $f|_{(0,\infty)}$ i $f|_{(-\infty,0)}$ řeší rovnici $y' + py = 0$. (Využijte výsledek (a).)
(c) [5 bodů] Nechť $V \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ splňuje $V' + p\cdot V = 0$.
- Ukažte, že $e^{-P}\cdot(e^P \cdot V)' = 0$.
- Z předchozího bodu odvoďte, že $(e^P \cdot V)' = 0$.
- Popište obecný tvar V.

(d) [3 body] Popište všechny hledané distribuce U. (Použijte kombinaci výsledků (b) a (c)).

Písemná zkouška z Úvodu do funkcionální analýzy (D)

ZS 2015-2016

Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledky, postup a orientační bodové hodnocení:
(a-1) Spojitost Tf plyne například z věty o spojitosti integrálu podle parametru, integrovatelná majoranta je $|f|$. [1 bod]
(a-2) Pro každé $t \in [-1,1]$ je $|Tf(t)| \leq \int_{-1}^{1} |f| = \|f\|_1$, tedy $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_1$, neboli $\|T_1\| \leq 1$. [1 body]
(a-3) Nechť $-1 \leq s < t \leq 1$ a $f \in B_X$. Pak $|Tf(t) - Tf(s)| \leq \int_{-1}^{1} |f(x)||e^{-itx} - e^{-isx}| \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |f(x)||e^{-i(t-s)x} - 1| \,\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{1} |f(x)||e^{-i(t-s)} - 1| \,\mathrm{d}x \leq |e^{-i(t-s)} - 1|$. Odtud snadno ze spojitosti exponenciály a z definice plyne, že $T_1(B_X)$ je stejně spojitá množina. [3 body]
(a-4) Z (a-2),(a-3) a Arzelà-Ascoliovy věty plyne, že T_1 je kompaktní. [1 bod]
(b-1) Definujme $T_2 : \mathcal{C}([-1,1]) \to L^1([-1,1])$ předpisem $T_2 f = f$. Pak $T_2 \in L(\mathcal{C}([-1,1]), X)$, $\|T_2\| \leq 2$ a $T = T_2 T_1$. [1 body]
(b-2) Protože T_2 je spojitý lineární operátor a T_1 kompaktní, je $T = T_2 T_1$ kompaktní. [1 body]
(c-1) $T'g(x) = \int_{-1}^{1} g(t) e^{-itx} \,\mathrm{d}t$, tedy vzorec pro T' je stejný jako pro T. Spočte se s využitím standardní reprezentace duálů a Fubiniovy věty. [3 body]
(c-2) Ze vzorce v (c-1) je snadno vidět, že $\|T'g\|_\infty \leq 2\|g\|_\infty$, tedy $\|T'\| \leq 2$. Volbou $g = 1$ (konstantní funkce) zjistíme, že $\|T'\| = 2$ a nabývá své normy. [2 body]
(d) Jest $\|T\| = \|T'\| = 2$. [1 bod]
(e-1) Nechť T nabývá své normy ve funkci $f \in S_X$. Pak v řetězci
$\|Tf\|_1 = \int_{-1}^{1} \left| \int_{-1}^{1} f(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}x \right| \,\mathrm{d}t \leq \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left| f(x) e^{-itx} \right| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |f(x)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = 2$ nastává rovnost.
(e-2) V oné jediné nerovnosti nastává rovnost, právě když pro skoro všechna $t \in [-1,1]$ platí $\left| \int_{-1}^{1} f(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}x \right| = \int_{-1}^{1} \left| f(x) e^{-itx} \right| \,\mathrm{d}x$. Označme symbolem B množinu těch $t \in [-1,1]$, pro které tato rovnost platí. Dle bodu (e-1) je tato množina plné míry.
(e-3) Nechť $t \in B$. Pak pro skoro všechna $x \in [-1,1]$ leží všechny hodnoty $f(x)e^{-itx}$ na jedné polopřímce vycházející z počátku. Tj. existuje $\alpha(t) \in \mathbb{C}$, $|\alpha(t)| = 1$, že $f(x)e^{-itx} = \alpha(t)|f(x)|$ pro skoro všechna $x \in [-1,1]$.
(e-4) Označme $A = \{x \in [-1,1]; f(x) \neq 0\}$. Protože $f \neq 0$, je A množina kladné míry. Z bodů (e-2) a (e-3) Dostáváme, že pro každé $t \in B$ platí $e^{-itx} = \alpha(t) \cdot \frac{|f(x)|}{f(x)}$ pro skoro všechna $x \in A$. To je spor s tvrzením uvedeným v návodu.

Příklad 2: Výsledky, postup a orientační bodové hodnocení:
(i) Protože pro každé $g \in L^2([0,1])$ platí $g \in L^1([0,1])$ a $\|g\|_1 \leq \|g\|_2$, je T dobře definovaný a splňuje $\|T(f,g)\| = \|g\|_1 + \|g\|_2 \leq 2\|g\|_2 \leq 2\|(f,g)\|$. Jelikož linearita T je zřejmá, dostaneme $T \in L(X)$ a $\|T\| \leq 2$. [2 body]
(ii) Z výpočtu $T'(u,v)(f,g) = (u,v)(T(f,g)) = (u,v)(g,g) = \int_0^1 (ug + vg) = (0, u+v)(f,g)$ vidíme, že $T'(u,v) = (0, u+v)$ pro $u \in L^\infty([0,1])$, $v \in L^2([0,1])$. [3 body]
(iii) T není kompaktní. Například $Y = \{(0,g); g \in L^2([0,1])\}$ je podprostor X nekonečné dimenze a $T|_Y$ je izomorfismus ($\|(0,g)\| \leq \|T(0,g)\| \leq 2\|(0,g)\|$). [3 body]
(iv-1) $\sigma_p(T) = \{0,1\}$. Vlastní vektory k vlastnímu číslu 0 jsou $(f,0)$, $f \in L^1([0,1]) \setminus \{0\}$. Vlastní vektory k vlastnímu číslu 1 jsou (g,g), $g \in L^2([0,1]) \setminus \{0\}$. Jiná vlastní čísla nejsou. To se zjistí přímočarým řešením patřičných rovnic. [3 body]
(iv-2) $\sigma_p(T') = \{0,1\}$. Vlastní vektory k vlastnímu číslu 0 jsou $(f,-f)$, $f \in L^\infty([0,1]) \setminus \{0\}$. Vlastní vektory k vlastnímu číslu 1 jsou $(0,g)$, $g \in L^2([0,1]) \setminus \{0\}$. Jiná vlastní čísla nejsou. To se zjistí přímočarým řešením patřičných rovnic. [3 body]
(v) $\sigma(T) = \{0,1\}$, $(\lambda I - T)^{-1}(u,v) = (\frac{1}{\lambda(\lambda-1)}v + \frac{1}{\lambda}u, \frac{1}{\lambda-1}v)$, $u \in L^1([0,1])$, $v \in L^2([0,1])$. Spočte se to přímočarým řešením patřičných rovnic. [3 body]

Příklad 3: Výsledky a postup řešení:

(a) Obecné řešení na $\mathbb{R}$ (nebo na libovolném otevřeném intervalu) je $y = ce^{-P}$, kde $c \in \mathbb{C}$ je libovolná konstanta.

(b) Dle návodu nechť $f(t) = \begin{cases} ae^{-P(t)} & t < 0, \\ be^{-P(t)}, & t > 0, \end{cases}$ kde $a, b \in \mathbb{C}$ jsou nějaké konstanty. Pak $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Úkolem je zvolit a, b tak, aby $\Lambda'_f + p\Lambda_f = \Lambda_{\delta_0}$, tj. aby pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ platilo $\Lambda'_f(\varphi) + (p\Lambda_f)(\varphi) = \varphi(0)$. Přitom levá strana vyjde (s použitím definic a integrace per partes zvlášť přes interval $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$) $(b - a)\varphi(0)$. Stačí tedy, aby platilo $b - a = 1$. Například tedy $U_0 = \Lambda_{f_0}$, kde $f_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ e^{-P(t)}, & t > 0. \end{cases}$

(c-1) S použitím definic vidíme, že pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ jest $(e^{-P} \cdot (e^P \cdot V)')(\varphi) = (e^P \cdot V)'(e^{-P}\varphi) = -(e^P \cdot V)((e^{-P}\varphi)') = -(e^P \cdot V)(-pe^{-P}\varphi + e^{-P}\varphi') = -V(-p\varphi + \varphi') = (pV)(\varphi) + V'(\varphi) = 0$.

(c-2) Pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ jest $(e^P \cdot V)'(\varphi) = (e^P \cdot V)'(e^{-P}e^P\varphi) = (e^{-P} \cdot (e^P \cdot V)')(e^P\varphi) = 0$ podle (c-1).

(c-3) Z (c-2) plyne, že existuje konstanta $c \in \mathbb{C}$, že $e^P \cdot V = \Lambda_c$, tj. $V = e^{-P}\Lambda_c = \Lambda_{ce^{-P}}$. To je obecný tvar V.

(d) Obecný tvar je $U = U_0 + \Lambda_{ce^{-P}} = \Lambda_{f_0 + ce^{-P}}$, $c \in \mathbb{C}$. Každá distribuce tohoto tvaru totiž splňuje rovnici ze zadání (díky výsledkům (b) a (c-3)). Obráceně, pokud U splňuje rovnici ze zadání, pak distribuce $V = U - U_0$ splňuje rovnici z bodu (c), a tedy U musí mít uvedený tvar.