Písemná zkouška z Úvodu do funkcionální analýzy (C)

ZS 2015-2016

Příklad 1: [17 bodů] Nechť prostor $H = L^2((-\pi,\pi))$ je opatřen standardním skalárním součinem a jím indukovanou normou. Uvažme funkce $f_1, f_2, f_3 \in H$ definované předpisem $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = |x|$ a $f_3(x) = e^x$ pro $x \in (-\pi,\pi)$ a podprostor

$$Y = \{c + f; f \in H \text{ lichá}, c \in \mathbb{F}\}.$$

(i) Ukažte, že Y je uzavřený podprostor H, a najděte ortogonální projekci na Y.
(ii) Najděte nejbližší body k prvkům f_1, f_2 a f_3 v podprostoru Y.
(iii) Spočtěte vzdálenost prvků f_1 a f_2 od prostoru Y.

Pomůcka: Než budete řešit úlohu (i), dokažte následující pomocné tvrzení: *Nechť H je Hilbertův prostor a Y_1, Y_2 jsou dva uzavřené podprostory H a P_1, P_2 nechť jsou jim příslušné ortogonální projekce. Pokud $Y_1 \perp Y_2$, pak $Y_1 + Y_2$ je uzavřený podprostor H a jemu příslušná ortogonální projekce je $P_1 + P_2$.*

Příklad 2: [18 bodů] Nechť X je prostor $c_0 \times \ell^1$ opatřený normou

$$\|(\mathbf{x},\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_1, \quad \mathbf{x} \in c_0, \mathbf{y} \in \ell^1.$$

Definujme $T : X \to X$ předpisem

$$T((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = \left(\left(\frac{y_n}{n}\right)_{n=1}^\infty, \left(\frac{x_n}{n^3}\right)_{n=1}^\infty\right), \quad \mathbf{x} \in c_0, \mathbf{y} \in \ell^1$$

(i) Ukažte, že $T \in L(X)$.
(ii) Vyjádřete duální operátor $T' \in L(\ell^1 \times \ell^\infty)$ s využitím standardní reprezentace duálů. (To, že duál X^* lze reprezentovat jako prostor $\ell^1 \times \ell^\infty$ opatřený normou $$\|(\mathbf{x},\mathbf{y})\| = \max\{\|\mathbf{x}\|_1, \|\mathbf{y}\|_\infty\}, \quad \mathbf{x} \in \ell^1, \mathbf{y} \in \ell^\infty,$$ nemusíte dokazovat. Stačí tento fakt využít.)
(iii) Rozhodněte, zda T je kompaktní.
(iv) Určete $\sigma_p(T)$ a $\sigma_p(T')$.
(v) Určete $\sigma(T)$.

Příklad 3: Nechť $(a_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ položme

$$U(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty a_n \varphi(n).$$

(i) [2 body] Ukažte, že U je distribuce na $\mathbb{R}$ řádu nula.
(ii) [2 body] Určete, pro které posloupnosti (a_n) je $U = \Lambda_\mu$ pro nějakou nezápornou borelovskou míru μ na $\mathbb{R}$.
(iii) [2 body] Určete, pro které posloupnosti (a_n) je $U = \Lambda_\mu$ pro nějakou (konečnou) komplexní či znaménkovou borelovskou míru μ na $\mathbb{R}$.
(iv) [4 body] Ukažte, že v případě, že existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^k} < \infty$, pak je U temperovaná distribuce.
(v) [5 bodů] Ukažte, že v předchozím bodě platí ekvivalence, tj. je-li U temperovaná distribuce, pak existuje $k \in \mathbb{N}$, že $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^k} < \infty$.

Návod:

(a) Nechť $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{spt}\psi \subset (-1,1)$, $\psi \geq 0$, $\psi(0) = 1$. Pro $n \in \mathbb{N}$ nechť $\psi_n(x) = \psi(x-n)$, $x \in \mathbb{R}$. Tyto funkce se budou hodit při řešení, například v úlohách (ii) a (v).
(b) Pro řešení úlohy (i) použijte příslušné definice.
(c) Při řešení úlohy (iv) ukažte, že existuje $C > 0$, že $|U(\varphi)| \leq C p_{k+2}(\varphi)$ pro $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ a použijte charakterizaci temperovaných distribucí. (k je to číslo ze zadání (iv).)
(d) Odhadněte $p_k(\psi_n)$ pomocí $\|\psi\|_k$.
(e) Při řešení úlohy (v) aplikujte charakterizaci temperovaných distribucí na funkce ψ_k a použijte odhad z bodu (d).

Písemná zkouška z Úvodu do funkcionální analýzy (C)

ZS 2015-2016

Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledky, postup a orientační bodové hodnocení:

(i-1) Důkaz pomocného tvrzení: $P_1 + P_2$ je zřejmě spojitý lineární operátor, pro každé $x \in H$ je $(P_1+P_2)x \in Y_1+Y_2$, pro $y \in Y_1$ je $(P_1+P_2)y = P_1y = y$, podobně pro $y \in Y_2$ je $(P_1+P_2)y = P_2y = y$, tedy $(P_1+P_2)y = y$ pro každé $y \in Y_1+Y_2$. Tedy P_1+P_2 je spojitá lineární projekce H na Y_1+Y_2, speciálně $Y_1 + Y_2$ je uzavřený. Že je to ortogonální projekce, plyne z toho, že pro každé $x \in H$, $y_1 \in Y_1$ a $y_2 \in Y_2$ platí: $\langle x-(P_1+P_2)x, y_1+y_2\rangle = \langle x-(P_1+P_2)x, y_1\rangle + \langle x-(P_1+P_2)x, y_2\rangle = \langle x - P_1x, y_1\rangle + \langle x - P_2x, y_2\rangle = 0$. [2 body]
(i-2) $Y = Y_1 + Y_2$, kde Y_1 je podprostor tvořený konstantními funkcemi a Y_2 je podprostor tvořený lichými funkcemi. Jde o uzavřené podprostory, navíc $Y_1 \perp Y_2$, lze tedy na ně použít pomocné tvrzení. Speciálně již víme, že Y je uzavřený. [2 body]
(i-3) Ortogonální projekce na Y_1 je daná vzorcem $P_1(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f$. (Hodnotou je příslušná konstantní funkce.) To plyne ze vzorce pro OG projekci pomocí ON báze, protože ON báze Y_1 je $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\}$. [1 bod]
(i-4) Ortogonální projekce na Y_2 je dána vzorcem $P_2(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$, $x \in (-\pi,\pi)$, $f \in H$. ($P_2(f)$ je vždy lichá, $P_2(f) = f$ pro f lichou, $\ker P$ tvoří sudé funkce, a ty jsou kolmé na liché funkce.) [2 body]
(i-5) Ortogonální projekce na Y je tedy $P = P_1 + P_2$, tedy $P(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f + \frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$, $x \in (-\pi,\pi)$, $f \in H$. [1 bod]
(ii) Nejbližším bodem v Y k bodu $f \in H$ je bod $P(f)$. Příslušné nejbližší body jsou tedy $P(f_1) = \frac{\pi^2}{3}$ (konstantní funkce), $P(f_2) = \frac{\pi}{2}$ (konstantní funkce), $P(f_3)(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} + \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$. [5 bodů]
(iii) $\operatorname{dist}(f_1, Y) = \|f_1 - Pf_1\|_2 = \sqrt{\frac{8}{45}}\pi^{5/2}$, $\operatorname{dist}(f_2, Y) = \|f_2 - Pf_2\|_2 = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{6}}$. [4 body]

Poznámka: Projekci P_2 lze alternativně vyjádřit pomocí teorie Fourierových řad. Z teorie FŘ totiž víme, že posloupnost funkcí $(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx)_{k=1}^{\infty}$ tvoří ON bázi Y_2. Pak tedy $P_2(f)(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t)\sin kx$, kde ovšem konvergenci řady uvažujeme v prostoru $L^2((-\pi,\pi))$, nikoli bodovou. Tento přístup poněkud komplikuje řešení úloh (ii) a (iii). Nicméně i z tohoto tvaru je snadno vidět, že $P_2(f_1) = P_2(f_2) = 0$, vzorec pro $P_2(f_3)$ je pak složitější.

Příklad 2: Výsledky, postup a orientační bodové hodnocení:
(i) Pro každé $\mathbf{y} \in \ell^1$ platí $(\frac{y_n}{n}) \in c_0$ a $\|(\frac{y_n}{n})\|_\infty \le \|\mathbf{y}\|_1$. Pro $\mathbf{x} \in c_0$ platí $\sum|\frac{x_n}{n^3}| \le \|\mathbf{x}\|_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Tedy T je dobře definovaný a splňuje $\|T(\mathbf{x},\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}\|_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} + \|\mathbf{y}\|_1 \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\|(\mathbf{x},\mathbf{y})\|$. Jelikož linearita T je zřejmá, dostaneme $T \in L(X)$ a $\|T\| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. [2 body]
(ii) Z výpočtů $T'(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{e}_n,\mathbf{0}) = (\mathbf{x},\mathbf{y})(T(\mathbf{e}_n,\mathbf{0})) = (\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{0},\frac{\mathbf{e}_n}{n^3}) = \frac{y_n}{n^3}$ a $T'(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{0},\mathbf{e}_n) = (\mathbf{x},\mathbf{y})(T(\mathbf{0},\mathbf{e}_n)) = (\mathbf{x},\mathbf{y})(\frac{\mathbf{e}_n}{n},\mathbf{0}) = \frac{x_n}{n}$ vidíme, že $T'(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ((\frac{y_n}{n^3}),(\frac{x_n}{n}))$ pro $\mathbf{x} \in \ell^1$, $\mathbf{y} \in \ell^\infty$. [4 body]
(iii) T je kompaktní. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme operátor
$T_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ((y_1, \frac{y_2}{2},\ldots,\frac{y_n}{n},0,0,\ldots),(x_1,\frac{x_2}{2^3},\ldots,\frac{x_n}{n^3},0,0,\ldots))$. Pak T_n je konečnědimenzionální a $\|(T_n - T)(\mathbf{x},\mathbf{y})\| \le \frac{1}{n+1}\|y\|_1 + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\|x\|_\infty$, tedy $\|T_n - T\| \le \max\{\frac{1}{n+1},\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\} \to 0$ pro $n \to \infty$. [3 body]
(iv-1) $\sigma_p(T) = \{\pm\frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N}\}$. Vlastní vektor k vlastnímu číslu $\frac{1}{n^2}$ je $(\mathbf{e}_n, \frac{\mathbf{e}_n}{n})$, vlastní vektor k vlastnímu číslu $-\frac{1}{n^2}$ je $(\mathbf{e}_n, -\frac{\mathbf{e}_n}{n})$. Jiná vlastní čísla nejsou. Spočte se to řešením příslušných rovnic (pro každé n musí platit $y_n = \lambda n x_n$ a $x_n = \lambda n^3 y_n$, tedy $y_n = \lambda^2 n^4 y_n$).[4 body]
(iv-2) $\sigma_p(T') = \sigma_p(T)$. Protože T' má podobný tvar jako T (s prohozením koeficientů u x_n a y_n), je výpočet téměř stejný jako pro T. [2 body]
(v) Protože T je kompaktní, je $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\} = \{0\} \cup \{\pm\frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N}\}$. [3 body]

Příklad 3: Výsledky a postup řešení:

(i) Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Protože $\operatorname{spt}\varphi$ je kompaktní, je $\varphi(n) \neq 0$ jen pro konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$. Proto je U dobře definované. Linearita je zřejmá. Je-li $K \subset \mathbb{R}$ kompaktní, existuje $N \in \mathbb{N}$, že $K \subset [-N, N]$. Tedy pro $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$ platí $|U(\varphi)| = |\sum_{n=1}^N a_n \varphi(n)| \leq \|\varphi\|_0 \cdot \sum_{n=1}^N |a_n|$. To dokazuje, že U je distribuce řádu nula.
(ii) $U = \Lambda_\mu$ pro nezápornou míru μ, právě když $a_n \geq 0$ pro všechna n. Jsou-li všechna a_n nezáporná, pak ona míra je $\mu = \sum_{n=1}^\infty a_n \delta_n$. Obráceně, je-li $U = \Lambda_\mu$ pro nezápornou míru μ, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = U(\psi_n) = \int \psi_n \,\mathrm{d}\mu \geq 0$.
(iii) $U = \Lambda_\mu$ pro konečnou znaménkovou či komplexní míru μ, právě když $\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty$. Pak $\mu = \sum_{n=1}^\infty a_n \delta_n$. Pokud řada diverguje, není U dána mírou. Pokud by totiž byla dána mírou, pak zúžení této míry na interval $(-N - 1/2, N + 1/2)$ musí být $\sum_{n=1}^N a_n \delta_n$. Taková míra však neexistuje.
(iv) Pokud $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^k} < \infty$, pak existuje $C > 0$, že $|a_n| \leq Cn^k$ pro všechna n. Pak pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ platí $|U(\varphi)| \leq \sum_{n=1}^\infty Cn^k |\varphi(n)| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} Cn^{k+2} |\varphi(n)| \leq C \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \cdot p_{k+2}(\varphi)$. Dle charakterizace temperovaných distribucí je U temperovaná distribuce.
(v-1) Pro každé k a n je $p_k(\psi_n) = \max_{j\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}} (1 + x^2)^k |\psi_n^{(j)}(x)|$. Protože $\operatorname{spt}\psi_n \subset (n-1, n+1)$ a $|\psi_n^{(j)}(x)| = |\psi^{(j)}(x - n)| \leq \|\psi^{(j)}\|_\infty$, dostáváme, že $p_k(\psi_n) \leq (1 + (n + 1)^2)^k \|\psi\|_k$.
(v-2) Nechť U je temperovaná distribuce. Pak dle charakterizace temperovaných distribucí existuje $k \in \mathbb{N}_0$ a $C > 0$, že pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ platí $|U(\varphi)| \leq Cp_k(\varphi)$. Dosadíme-li funkce ψ_n a použijeme odhad z předchozího bodu, dostaneme $|a_n| = |U(\psi_n)| \leq Cp_k(\psi_n) \leq C(1 + (n + 1)^2)^k \|\psi\|_k$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^{2k+1}} = 0$.