Písemná zkouška z Úvodu do funkcionální analýzy (B)

ZS 2015-2016

Příklad 1: [18 bodů] Nechť $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ je prostor spojitých reálných funkcí na $[0,1]$ opatřený supremovou normou. Definujme funkcionály φ_1 a φ_2 předpisem

$$\varphi_1(f) = \int_0^{1/3} f + \int_{2/3}^1 f, \quad \varphi_2(f) = \int_0^{1/3} f - \int_{2/3}^1 f, \qquad f \in X$$

a podprostory

$$Y_1 = \{f \in X; f(0) = f(1)\}, \qquad Y_2 = \{f \in X; f(0) = -f(1)\}.$$

(i) Ukažte, že $\varphi_1, \varphi_2 \in X^*$.
(ii) Spočtěte normy funkcionálů $\varphi_1|_{Y_1}$, $\varphi_1|_{Y_2}$, $\varphi_2|_{Y_1}$, $\varphi_2|_{Y_2}$.
(iii) Určete, které z funkcionálů z předchozího bodu nabývají své normy a které nikoli.

Vysvětlení a pomůcka:

(a) $\|\varphi_1|_{Y_1}\| = \sup\{|\varphi_1(f)|; f \in B_{Y_1}\}$, přičemž $B_{Y_1} = B_X \cap Y_1$. Tento funkcionál nabývá normy, právě když existuje $f \in B_{Y_1}$, pro kterou $|\varphi_1(f)| = \|\varphi_1|_{Y_1}\|$.
(b) Při řešení bodu (ii) může trochu ušetřit čas a námahu, pokud spočteme normy funkcionálů φ_1 a φ_2 zúžených na $Y_1 \cap Y_2$.

Příklad 2: [17 bodů] Nechť X je prostor $c_0 \times \ell^2$ opatřený normou

$$\|(\mathbf{x},\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_2, \quad \mathbf{x} \in c_0, \mathbf{y} \in \ell_2.$$

Definujme $T : X \to X$ předpisem

$$T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{0}), \quad \mathbf{x} \in c_0, \mathbf{y} \in \ell_2$$

(i) Ukažte, že $T \in L(X)$.
(ii) Vyjádřete duální operátor $T' \in L(\ell^1 \times \ell^2)$ s využitím standardní reprezentace duálů. (To, že duál X^* lze reprezentovat jako prostor $\ell^1 \times \ell^2$ opatřený normou
$$\|(\mathbf{x},\mathbf{y})\| = \max\{\|\mathbf{x}\|_1, \|\mathbf{y}\|_2\}, \quad \mathbf{x} \in \ell^1, \mathbf{y} \in \ell^2,$$
nemusíte dokazovat. Stačí tento fakt využít.)
(iii) Rozhodněte, zda T je kompaktní.
(iv) Určete $\sigma_p(T)$ a $\sigma_p(T')$.
(v) Určete $\sigma(T)$ a vyjádřete rezolventní funkci T, tj. $(\lambda I - T)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

Příklad 3: Nechť μ je konečná (znaménková či komplexní) borelovská regulární míra na čtverci $(0,1)^2$. Nechť Λ_μ značí distribuci na $(0,1)^2$ určenou mírou μ, tj.

$$\Lambda_\mu(\varphi) = \int_{(0,1)^2} \varphi \, \mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in \mathscr{D}((0,1)^2).$$

Předpokládejme, že $\frac{\partial}{\partial x}\Lambda_\mu = 0$ (tj., $D^{(1,0)}\Lambda_\mu = 0$ při značení s multiindexy). Ukažte, že $\mu = \lambda \times \nu$, kde λ je Lebesgueova míra na $(0,1)$ a ν je nějaká míra na $(0,1)$.
Návod:

(a) [2 body] Pro $\varphi \in \mathscr{D}((0,1)^2)$ definujme funkci
$$T\varphi(y) = \int_0^1 \varphi(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad y \in (0,1).$$
Ukažte, že T je lineární zobrazení $\mathscr{D}((0,1)^2)$ do $\mathscr{D}((0,1))$.
(b) [3 body] Ukažte, že pro $\varphi \in \mathscr{D}((0,1)^2)$ platí $T\varphi = 0$, právě když existuje $\psi \in \mathscr{D}((0,1)^2)$, pro kterou $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \varphi$.
(c) [3 body] Z předpokladu $\frac{\partial}{\partial x}\Lambda_\mu = 0$ a z (b) odvoďte, že $\ker T \subset \ker \Lambda_\mu$.
(d) [3 body] Zvolme pevně $\eta \in \mathscr{D}((0,1))$ splňující $\int_0^1 \eta = 1$. Z bodu (c) odvoďte, že pro každou $\varphi \in \mathscr{D}((0,1)^2)$ platí
$$\Lambda_\mu(\varphi) = \Lambda_\mu((x,y) \mapsto \eta(x)T\varphi(y)).$$
(e) [3 body] Nechť μ_1 je míra na $(0,1)^2$ definovaná předpisem
$$\mu_1(A) = \int_A \eta(x)\,\mathrm{d}\mu(x,y), \quad A \subset (0,1)^2 \text{ borelovská}$$
a $\nu = p(\mu_1)$ je obraz míry μ_1 při zobrazení $p : (x,y) \mapsto y$. S využitím rovnosti z bodu (d), definic a Fubiniovy ukažte, že $\Lambda_\mu = \Lambda_{\lambda\times\nu}$.
(f) [1 bod] Z bodu (e) odvoďte, že $\mu = \lambda \times \nu$.

Písemná zkouška z Úvodu do funkcionální analýzy (B)

ZS 2015-2016

Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledky: $\|\varphi_1|_{Y_1}\| = \|\varphi_1|_{Y_2}\| = \|\varphi_2|_{Y_1}\| = \|\varphi_2|_{Y_2}\| = \frac{2}{3}$, přitom funkcionály $\|\varphi_1|_{Y_1}\|$ a $\|\varphi_2|_{Y_2}\|$ své normy nabývají a funkcionály $\|\varphi_1|_{Y_2}\|$ a $\|\varphi_2|_{Y_1}\|$ své normy nenabývají.

Postup a orientační bodové hodnocení:
(i) Linearita obou funkcionálů plyne z linearity integrálu. Integrály konvergují, protože jde o integrály ze spojité funkce na uzavřeném intervalu. Snadno lze spočíst, že $|\varphi_1(f)| \le \frac{2}{3}\|f\|_\infty$ a $|\varphi_2(f)| \le \frac{2}{3}\|f\|_\infty$ pro $f \in X$. Odtud plyne, že $\varphi_1, \varphi_2 \in X^*$ a že norma obou funkcionálů je nejvýše $\frac{2}{3}$. [2 body]
(ii) Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme funkce f_n, g_n předpisem

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & t = 0, \\ 1 & t \in [\frac{1}{3n}, 1 - \frac{1}{3n}], \\ 0 & t = 1; \end{cases} \qquad g_n(t) = \begin{cases} 0 & t = 0, \\ 1 & t \in [\frac{1}{3n}, \frac{1}{3}], \\ -1 & t \in [\frac{2}{3}, 1 - \frac{1}{3n}], \\ 0 & t = 1; \end{cases}$$

přičemž na vynechaných intervalech jsou doplněny lineárně. Pak $f_n, g_n \in Y_1 \cap Y_2$, $\|f_n\|_\infty = \|g_n\|_\infty = 1$, $\varphi_1(f_n) \to \frac{2}{3}$ a $\varphi_2(g_n) \to \frac{2}{3}$. Když tento fakt doplníme odhadem z (i), vidíme, že všechny čtyři funkcionály mají normu $\frac{2}{3}$. [7 bodů].
(iii-1) $\varphi_1|_{Y_1}$ nabývá své normy například ve funkci konstantně rovné jedné. [1 bod]
(iii-2) $\varphi_2|_{Y_2}$ nabývá své normy například ve funkci, která se rovná 1 na $[0, \frac{1}{3}]$, -1 na $[\frac{2}{3}, 1]$ a je doplněna lineárně na $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. [2 body]
(iii-3) $\varphi_1|_{Y_2}$ nenabývá své normy. Pokud totiž $f \in B_{Y_2}$ splňuje $|\varphi_1(f)| = \frac{2}{3}$, musí v příslušných výpočtech z bodu (i) všude nastat rovnosti. Z toho odvodíme, že $|f(t)| = 1$ na $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Protože ovšem $f \in Y_2$, je $f(0) = -f(1)$, a tedy $\varphi_1(f) = 0$ (protože na jednom z intervalů musí být f konstantně rovna 1 a na druhém -1). Což je spor, normy se tedy nenabývá. [4 body]
(iii-4) $\varphi_2|_{Y_1}$ nenabývá své normy. Důkaz se vede podobně jako v bodě (iii-3). Pokud by se normy nabývalo v bodě $f \in B_{Y_1}$, pak opět odvodíme, že $|f(t)| = 1$ na $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Protože ovšem $f \in Y_1$, je $f(0) = f(1)$, a tedy $\varphi_2(f) = 0$, protože f je konstantní na $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. [2 body]

Příklad 2: Výsledky, postup a orientační bodové hodnocení:
(i) Protože pro každé $\mathbf{y} \in \ell^2$ platí $\mathbf{y} \in c_0$ a $\|\mathbf{y}\|_\infty \le \|\mathbf{y}\|_2$, je T dobře definovaný a splňuje $\|T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| = \|\mathbf{y}\|_\infty \le \|\mathbf{y}\|_2 \le \|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|$. Jelikož linearita T je zřejmá, dostaneme $T \in L(X)$ a $\|T\| \le 1$. [2 body]
(ii) Z výpočtů $T'(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{e}_n, \mathbf{0}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})(T(\mathbf{e}_n, \mathbf{0})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ a $T'(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{0}, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})(T(\mathbf{0}, \mathbf{e}_n)) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{e}_n, \mathbf{0}) = x_n$ vidíme, že $T'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{0}, \mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} \in \ell^1$, $\mathbf{y} \in \ell^2$. [4 body]
(iii) T není kompaktní. Například posloupnost $((\mathbf{0}, \mathbf{e}_n))_{n=1}^\infty$ je omezená v X a pro $m \ne n$ platí $\|T(\mathbf{0}, \mathbf{e}_n) - T(\mathbf{0}, \mathbf{e}_m)\| = \|(\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m, \mathbf{0})\| = \|\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m\|_\infty = 1$. Proto z posloupnosti $(T(\mathbf{0}, \mathbf{e}_n))_{n=1}^\infty$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost. [3 body]
(iv-1) $\sigma_p(T) = \{0\}$. Vlastní vektory k vlastnímu číslu 0 jsou $(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, $\mathbf{x} \in c_0 \setminus \{0\}$. Jiná vlastní čísla nejsou. To se zjistí přímočarým řešením patřičných rovnic. [3 body]
(iv-2) $\sigma_p(T') = \{0\}$. Vlastní vektory k vlastnímu číslu 0 jsou $(\mathbf{0}, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \ell^2 \setminus \{0\}$. Jiná vlastní čísla nejsou. Výpočet je téměř stejný jako pro T. [2 body]
(v) $\sigma(T) = \{0\}$, $(\lambda I - T)^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\frac{1}{\lambda^2}\mathbf{v} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{u}, \frac{1}{\lambda}\mathbf{v})$, $\mathbf{u} \in c_0$, $\mathbf{v} \in \ell^1$. Spočte se to přímočarým řešením patřičných rovnic. [3 body]

Příklad 3: Výsledky a postup řešení:

(a) Nechť $\varphi \in \mathscr{D}((0,1)^2)$. Pak $T\varphi \in \mathcal{C}^\infty((0,1))$ podle věty o spojitosti a derivace integrálu závislého na parametru (integrovatelná majoranta je vždy vhodná konstanta). Pokud $\operatorname{spt} \varphi \subset [\varepsilon, 1-\varepsilon]^2$, pak zřejmě $\operatorname{spt} T\varphi \subset [\varepsilon, 1-\varepsilon]2$, tedy $T\varphi \in \mathscr{D}((0,1))$. Linearita T plyne z linearity integrálu.

(b) Implikace $\Leftarrow$ plyne z výpočtu integrálu pomocí primitivní funkce. Implikace $\Rightarrow$: Nechť $T\varphi = 0$. Položme $\psi(x,y) = \int_0^x \varphi(t,y)\,\mathrm{d}t$. Pak $\psi \in \mathcal{C}^\infty((0,1)^2)$, $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \varphi$. Pokud $\operatorname{spt}\varphi \subset [\varepsilon, 1-\varepsilon]^2$, pak z toho, že $T\varphi = 0$ odvodíme $\operatorname{spt}\psi \subset [\varepsilon, 1-\varepsilon]^2$, tedy $\psi \in \mathscr{D}((0,1)^2)$.

(c) Toto plyne z definice derivace distribuce – $\frac{\partial}{\partial x}\Lambda_\mu(\varphi) = -\Lambda(\frac{\partial\varphi}{\partial x})$, tedy předpoklad $\frac{\partial}{\partial x}\Lambda_\mu = 0$ dává $\Lambda(\frac{\partial\varphi}{\partial x}) = 0$ pro každou $\varphi \in \mathscr{D}((0,1)^2)$. Zbývá použít ekvivalenci z (b).

(d) Toto plyne z faktu, že $(x,y) \mapsto \varphi(x,y) - \eta(x)T\varphi(y)$ je testovací funkce, která patří do jádra T, což lze ověřit přímým výpočtem.

(e) Toto plyne z výpočtu $\Lambda_{\lambda\times\nu}(\varphi) = \int_{(0,1)^2} \varphi\,\mathrm{d}(\lambda \times \nu) = \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_{(0,1)} T\varphi(y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_{(0,1)^2} T\varphi(y)\,\mathrm{d}\mu_1(x,y) = \int_{(0,1)^2} T\varphi(y)\eta(x)\,\mathrm{d}\mu(x,y) = \Lambda_\mu((x,y) \mapsto \varphi(x,y) - \eta(x)T\varphi(y)) = \Lambda_\mu(\varphi)$.

(f) Toto plyne z faktu, že pokud dvě míry určují tutéž distribuci, pak se rovnají (viz Lemma IV.6 resp. poznámku za Příklady IV.9 z přednášky).