Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (E)
ZS 2013-2014

Příklad 1: Pro funkci
$$f(z) = \frac{e^{(z^2)} - 1}{(e^z - 1)^2}$$
najděte všechny kořeny a izolované singularity. Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x^4 - \pi^4}\, \mathrm{d}x$$
(20 bodů)

Příklad 3: Spočtěte integrál:
$$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}(x^2+4)}\, \mathrm{d}x$$
(20 bodů)

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (E)
ZS 2013-2014
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek: f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi i, k \in \mathbf{Z}\}$. V bodech $2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ má pól násobnosti 2; v bodě 0 je odstranitelná singularita, po dodefinování je tam nenulová hodnota. Kořeny jsou v bodech$\sqrt{2k\pi} \cdot \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ (všechny čtyři možnosti znamének), $k \in \mathbf{N}$, všechny násobnosti 1.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Čitatel i jmenovatel jsou celé funkce.
2) Jmenovatel má kořeny v bodech $2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$, všechny násobnosti 2 (2 body).
3) Čitatel má kořen 0 násobnosti 2 (je vidět z tvaru mocninné řady, 2 body) a kořeny $\sqrt{2k\pi} \cdot \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ (všechny čtyři možnosti znamének) pro $k \in \mathbf{N}$, všechny násobnosti 1 (lze dokázat pomocí derivování, 3 body)
4) Kombinací předchozího dostaneme výsledek. (3 body)

Příklad 2: Výsledek: $-\frac{1+e^{-\pi/2}}{4\pi^2}$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje (dokonce absolutně): Integrovaná funkce je spojitá na $[0, +\infty) \setminus \{\pi\}$, v bodě π má vlastní limitu, v okolí $+\infty$ lze použít srovnávací kritérium. (1 bod)
2) Integrovaná funkce je sudá, integrál je tedy roven polovině integrálu přes $(-\infty, +\infty)$. (1 bod)
3) Položme $g(z) = \frac{e^{iz/2}}{z^4 - \pi^4}$. Pak g je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-\pi, \pi, i\pi, -i\pi\}$. Všechny čtyři póly jsou násobnosti 1. (2 body)
4) Uvažme křivku $\varphi_{r,R} = \psi_R \dotplus [-R, -\pi - r] \dotplus (\dot- \eta_r) \dotplus [-\pi + r, \pi - r] \dotplus (\dot- \theta_r) \dotplus [\pi + r, R]$, kde $R > \pi + 1$, $r \in (0,1)$, $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $\eta_r(t) = -\pi + re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $\theta_r(t) = \pi + re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. (2 body)
5) Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_{R,r}} g$: Z pólů určených v bodě 3) je „uvnitř" jen bod $i\pi$ (v něm je index 1, v ostatních třech je index 0). Reziduum v bodě πi je rovno $\frac{e^{-\pi/2}}{4\pi^3} i$. Integrál je tedy roven $-\frac{e^{-\pi/2}}{2\pi^2}$. (3 body)
6) Provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$ a $r \to 0+$:
(i) $\int_{\psi_R} g \to 0$ pro $R \to \infty$ podle Jordanova lemmatu. (2 body)
(ii) $\lim_{r \to 0+} \int_{\eta_r} g = \pi i \operatorname{res}_{-\pi} g$ podle jistého lemmatu (g má v $-\pi$ pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $\frac{i}{4\pi^3}$, limita je tedy $-\frac{1}{4\pi^2}$. (2 body)
(ii) $\lim_{r \to 0+} \int_{\theta_r} g = \pi i \operatorname{res}_{\pi} g$ podle téhož lemmatu (g má v π pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $\frac{i}{4\pi^3}$, limita je tedy$-\frac{1}{4\pi^2}$. (2 body)
(iii) Reálná část integrálu přes tři úsečky z definice $\varphi_{r,R}$ má limitu (pro $R \to \infty$ a $r \to 0+$) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x^4 - \pi^4}\, \mathrm{d}x$. (2 body)
7) Kombinací předchozího – výsledků z bodů 5) a 6) a bodu 2) dostaneme výsledek. (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{\sqrt[3]{4}}{12}\pi(6+\sqrt{3})$

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje dle srovnávacího kritéria. (1 bod)
2) Substitucí $x = e^y$ převedeme na $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2y/3}(e^y+1)}{(e^{2y}+4)}\,\mathrm{d}y$. (2 body)
3) Nechť φ_R je kladně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy $-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i$. Spočteme integrál funkce z bodu 2) podél φ_R podle reziduové věty (2 body):
(i) Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{y \in \mathbb{C} : e^{2y} = -4\}$. Ve vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. Pro $R > \ln 2$ jsou z nich „uvnitř křivky" právě body $z_1 = \ln 2 + \frac{\pi}{2} i$ a $z_2 = \ln 2 + \frac{3}{2}\pi i$. (Tj. v těchto dvou je index 1, v ostatních je index 0.) (3 body)
(ii) Reziduum v bodě z_1 je $-\frac{\sqrt[3]{4}}{8}(\frac{1}{2} - \sqrt{3} + (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i)$, reziduum v bodě z_2 je $\frac{\sqrt[3]{4}}{8}(1-2i)$. (4 body)
(iii) Zmíněný křivkový integrál je tedy roven $\frac{\sqrt[3]{4}}{8}\pi(6+\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})i)$. (3 body)
4) Provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$. Integrály přes obě svislé úsečky mají limitu 0, integrál přes $[-R, R]$ má limitu I, integrál přes $[R+2\pi i, -R+2\pi i]$ má limitu $e^{\frac{4}{3}\pi i} I$. (2 body)
5) Dostáváme tedy $(1 - e^{\frac{4}{3}\pi i})I = \frac{\sqrt[3]{4}}{8}\pi(6+\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})i)$, odkud spočteme výsledek. (3 body)