Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (D)
ZS 2013-2014

Příklad 1: Pro $\alpha \in (0, 2\pi)$ uvažujme křivky

$$\psi_\alpha(t) = 2e^{it}, \quad t \in [0, \alpha] \qquad \text{a} \qquad \varphi_\alpha = [0, 2] \dot{+} \psi_\alpha \dot{+} [2e^{i\alpha}, 0].$$

Spočtěte přírůstek logaritmu funkce $z^4 + 1$ podél křivky φ_α v závislosti na $\alpha \in (0, 2\pi)$. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 3x + 7)(x^2 - 3x + 7)} \, dx \qquad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x + 2} \qquad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (D)
ZS 2013-2014
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek: 0 pro $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$; $2\pi i$ pro $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$, $4\pi i$ pro $\alpha \in (\frac{3}{4}\pi 4, \frac{5}{4}\pi)$, $6\pi i$ pro $\alpha \in (\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$, $8\pi i$ pro $\alpha \in (\frac{7}{4}\pi, 2\pi)$. Pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{3}{4}\pi$, $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ a $\alpha = \frac{7}{4}\pi$ nemá smysl.
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Označme $f(z) = z^4 + 1$. Funkce f je celá funkce, která má čtyři kořeny, a to $e^{\frac{1}{4}\pi i}$, $e^{\frac{3}{4}\pi i}$, $e^{\frac{5}{4}\pi i}$ a $e^{\frac{7}{4}\pi i}$, všechny násobnosti 1. (2 body)
2)Pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{3}{4}\pi$, $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ a $\alpha = \frac{7}{4}\pi$ nemá úloha smysl, neboť funkce nabývá nuly na $\langle \varphi_\alpha \rangle$. (1 bod)
3) Pro ostatní α je přírůstek roven $\int_{\varphi_\alpha} \frac{f'}{f} = \int_{\varphi_\alpha} \frac{4z^3}{z^4+1} \, dz$, což lze snadno spočítat s využitím reziduové věty:
(i) $\frac{f'}{f}$ je holomorfní na celé komplexní rovině kromě kořenů f. Všechny mají násobnost 1, tedy jde o póly násobnosti 1 pro funkci $\frac{f'}{f}$. (1 bod)
(ii) Reziduum v každém z pólů je rovno 1. (2 body)
(iii) Přírůstek je tedy roven $2\pi i$ krát počet kořenů f „uvnitř křivky φ_α“. Rozborem případů dostaneme výsledek. (4 body)

Příklad 2: Výsledek: $\frac{3\pi}{7\sqrt{19}}$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Integrál konverguje (funkce je spojitá na $[0,+\infty)$, použije se srovnávací kritérium). (1 bod)

2) Označme integrovanou funkci f. Funkce f je sudá, proto integrál ze zadání je roven $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f$. (1 bod)

3) Pro $R > 0$ nechť $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, a $\varphi_R = [-R, R] \dotplus \psi_R$. Spočteme integrál z f podél φ_R dle reziduové věty a provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$. (2 body)

3) f je racionální funkce s póly v bodech $\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{19}}{2}$, $\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{19}}{2}$, $-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{19}}{2}$ a $-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{19}}{2}$. Všechny póly jsou násobnosti 1. Přitom body $\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{19}}{2}$ a $-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{19}}{2}$ leží „vně křivky“, je v nich index nula, v pólech $\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{19}}{2}$ a $-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{19}}{2}$ je (pro $R > \sqrt{7}$) index 1. (4 body)

4) Reziduum v bodě $\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{19}}{2}$ je $\frac{2}{21} - \frac{3}{14\sqrt{19}}i$, reziduum v bodě $-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{19}}{2}$ je $-\frac{2}{21} - \frac{3}{14\sqrt{19}}i$. (5 bodů)

5) Pro $R > \sqrt{7}$ je dle reziduové věty $\int_{\varphi_R} = \frac{6\pi}{7\sqrt{19}}$. (4 body)

6) $\lim_{R\to\infty} \int_{\psi_R} f = 0$, limita integrálu přes $[-R, R]$ je rovna dvojnásobku integrálu ze zadání. Tím dostáváme výsledek. (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $\pi(1-\sqrt{2})$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Nechť φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 1. Pak integrál ze zadání je roven $\int_\varphi -\frac{z^2+1}{z((1+i)z^2+4iz-1+i)}\,\mathrm{d}z$. Ten spočítáme podle reziduové věty. (5 bodů)

2) Integrovaná funkce je funkce racionální, s póly v bodech 0, $(-1+\frac{1}{\sqrt{2}})(1+i)$ a $(-1-\frac{1}{\sqrt{2}})(1+i)$; všechny násobnosti 1. Přičemž bod $(-1-\frac{1}{\sqrt{2}})(1+i)$ je mimo jednotkový kruh (index je v něm 0) a body 0 a $(-1+\frac{1}{\sqrt{2}})(1+i)$ jsou uvnitř jednotkového kruhu (index je v nich 1). (5 bodů)

3) Spočteme rezidua:

(i) Reziduum v bodě 0 je $-\frac{1}{2}(1+i)$. (2 body)

(ii) Reziduum v bodě $(-1+\frac{1}{\sqrt{2}})(1+i)$ je $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$. (4 body)

4) Aplikací reziduové věty dostaneme výsledek. (4 body)