Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (A)
ZS 2013-2014

Příklad 1: Pro funkci
$$f(z) = \operatorname{cotg}(z^2) \cdot (1 - \cos z)$$
najděte všechny kořeny a izolované singularity. Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+4x^2+4}\,\mathrm{d}x$$
(20 bodů)

Příklad 3: Spočtěte integrál:
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+3\cos^2 x)(5-3\sin x)}\,\mathrm{d}x$$
(20 bodů)

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (A)
ZS 2013-2014
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: f je holomorfní na $\mathbf{C} \setminus (\{0\} \cup \{\pm\sqrt{k\pi} : k \in \mathbf{N}\} \cup \{\pm i\sqrt{k\pi} : k \in \mathbf{N}\})$. V bodě 0 je odstranitelná singularita (s nenulovou limitou), v ostatních bodech jsou póly násobnosti 1. Kořeny jsou v bodech $\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ a $\pm i\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, všechny násobnosti 1; a dále v bodech $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, všechny násobnosti 2.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Funkci f vyjádříme ve tvaru $f(z) = \frac{\cos(z^2)}{\sin(z^2)}(1-\cos z)$.
2) Funkce $1-\cos z$ je celá funkce, kořeny má v bodech $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, všechny násobnosti 2. (Násobnost nuly plyne z vyjádření mocninnou řadou, v ostatních bodech z periodičnosti.) (2 body)
3) Funkce $\cos(z^2)$ je celá funkce, kořeny má v bodech $\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ a $\pm i\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, všechny mají násobnost 1 (například proto, že derivace je nenulová). (2 body)
4) Funkce $\sin(z^2)$ je celá funkce, kořeny má v bodech množiny $\{0\} \cup \{\pm\sqrt{k\pi} : k \in \mathbf{N}\} \cup \{\pm i\sqrt{k\pi} : k \in \mathbf{N}\}$. Přitom kořen nula má násobnost 2 (je vidět z vyjádření mocninnou řadou) a ostatní mají násobnost 1 (například proto, že derivace je nenulová). (3 body)
5) Kombinací předchozího dostaneme výsledek. (3 body)

Příklad 2: Výsledek: $\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Integrál konverguje (funkce je spojitá na $[0,+\infty)$, použije se srovnávací kritérium). (1 bod)

2) Označme integrovanou funkci f. f je sudá, a tedy integrál přes $(0,+\infty)$ je polovina integrálu přes $\mathbf{R}$. (1 bod).

3) Pro $R > 0$ nechť $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, a $\varphi_R = [-R,R] \dotplus \psi_R$. Spočteme integrál z f podél φ_R dle reziduové věty a provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$. (3 body)

3) f je racionální funkce s póly v bodech $i\sqrt{2}$ a $-i\sqrt{2}$. Oba póly jsou násobnosti 2. Přitom bod $-i\sqrt{2}$ leží „vně křivky“, je v něm index nula, ve druhém je (pro $R > \sqrt{2}$) index 1. (4 body)

4) Reziduum v bodě $i\sqrt{2}$ je $-\frac{3i}{8\sqrt{2}}$ (4 body)

5) Pro $R > \sqrt{2}$ je dle reziduové věty $\int_{\varphi_R} = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$. (4 body)

6) $\lim_{R\to\infty} \int_{\psi_R} f = 0$, limita integrálu přes $[-R,R]$ je rovna dvojnásobku integrálu ze zadání. Tím dostáváme výsledek. (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{7}{26}\pi$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Nechť φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 1. Pak integrál ze zadání je roven $\int_\varphi \frac{-\frac{8}{9}z^2}{(z^4+\frac{10}{3}z^2+1)(z^2-\frac{10}{3}iz-1)}\,\mathrm{d}z$. Ten spočítáme podle reziduové věty. (4 body)

2) Integrovaná funkce je funkce racionální, s póly v bodech $3i$, $\frac{i}{3}$, $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$, $\frac{i}{\sqrt{3}}$ a $-\frac{i}{\sqrt{3}}$; všechny násobnosti 1. Přičemž body $3i$ a $\pm i\sqrt{3}$ jsou mimo jednotkový kruh (index je v nich 0) a body $\frac{i}{3}$ a $\pm\frac{i}{\sqrt{3}}$ jsou uvnitř jednotkového kruhu (index je v nich 1). (4 body)

3) Spočteme rezidua:

(i) Reziduum v bodě $\frac{i}{3}$ je $\frac{3}{52}i$. (2 body)

(ii) Reziduum v bodě $\frac{i}{\sqrt{3}}$ je $-\frac{5+2\sqrt{3}}{52}i$. (4 body)

(iii) Reziduum v bodě $-\frac{i}{\sqrt{3}}$ je $-\frac{5-2\sqrt{3}}{52}i$. (3 body)

4) Aplikací reziduové věty dostaneme výsledek. (3 body)