Písemná zkouška z Matematiky IV pro IES FSV UK (E)
LS 2011-2012

Příklad 1: Najděte všechna řešení diferenční rovnice

$$y(n+3) - y(n+2) + 9y(n+1) - 9y(n) = n \cdot (-1)^n.$$

Pro která z těchto řešení existuje limita $\lim_{n\to+\infty} y(2n)$? Jakých hodnot může tato limita nabývat? (12 bodů)

Příklad 2: Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice:

$$y' = \frac{4x^2 + 6xy + 3y^2}{xy}$$

(12 bodů)

Příklad 3: Uvažujme následující autonomní rovnici:

$$y' = (1+y) \cdot \sqrt[3]{y(y-1)^2}$$

Na základě vyšetření definičních oborů a průběhu řešení určete a načrtněte následující množiny:

(a) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází více než jedno maximální řešení.
(b) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno maximální řešení.
(c) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno řešení definované na $\mathbf{R}$.
(d) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké rostoucí maximální řešení.

(12 bodů)

Příklad 4: Uvažujme následující diferenciální rovnici:

$$y' + \frac{y}{\cos x} = \frac{\cos x}{y}$$

Ukažte, že existuje její řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = -\sqrt{2}$, a vypočtěte jeho tvar na okolí bodu 0. (12 bodů)

Příklad 5: Najděte fundamentální systém řešení soustavy

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -8 & 25 & -18 \\ -7 & 16 & -10 \\ -7 & 13 & -7 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}.$$

Pro každé řešení $\mathbf{y}$ soustavy spočtěte $\lim_{x\to-\infty} e^x \cdot y_1(x)$. (12 bodů)

Výsledky písemky z Matematiky IV pro IES FSV UK (E)
LS 2011-2012

Příklad 1: $\{y(n)\} = \left\{\left(-\frac{n}{20} + \frac{7}{200}\right) \cdot (-1)^n + a + b \cdot 3^n \cos\frac{n\pi}{2} + c \cdot 3^n \sin\frac{n\pi}{2}\right\}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$. $\lim_{n\to+\infty} y(2n)$ existuje, právě když $b = 0$. Tato limita je pak rovna $-\infty$.

Příklad 2: Maximální řešení jsou:
$y(x) = -x$, $x \in (-\infty, 0)$; $y(x) = -x$, $x \in (0, +\infty)$;
$y(x) = -2x$, $x \in (-\infty, 0)$; $y(x) = -2x$, $x \in (0, +\infty)$;
V následujících řešeních je $c \in \mathbf{R}$ libovolné.
$y(x) = \frac{x}{2}\left(x^2e^c - 4 + xe^{c/2}\sqrt{x^2e - 4}\right)$, $x \in (-\infty, -2e^{-c/2})$
$y(x) = \frac{x}{2}\left(x^2e^c - 4 - xe^{c/2}\sqrt{x^2e - 4}\right)$, $x \in (-\infty, -2e^{-c/2})$
$y(x) = \frac{x}{2}\left(x^2e^c - 4 + xe^{c/2}\sqrt{x^2e - 4}\right)$, $x \in (2e^{-c/2}, +\infty)$
$y(x) = \frac{x}{2}\left(x^2e^c - 4 - xe^{c/2}\sqrt{x^2e - 4}\right)$, $x \in (2e^{-c/2}, +\infty)$
$y(x) = \frac{x}{2}\left(-x^2e^c - 4 + xe^{c/2}\sqrt{x^2e + 4}\right)$, $x \in (-\infty, 0)$
$y(x) = \frac{x}{2}\left(-x^2e^c - 4 - xe^{c/2}\sqrt{x^2e + 4}\right)$, $x \in (-\infty, 0)$
$y(x) = \frac{x}{2}\left(-x^2e^c - 4 + xe^{c/2}\sqrt{x^2e + 4}\right)$, $x \in (0, +\infty)$
$y(x) = \frac{x}{2}\left(-x^2e^c - 4 - xe^{c/2}\sqrt{x^2e + 4}\right)$, $x \in (0, +\infty)$

Příklad 3:
(a) $\{[u, v] \in \mathbf{R}^2 : v \in \langle 0, +\infty)\}$
(b) $\{[u, v] \in \mathbf{R}^2 : v \in (-\infty, 0)\}$
(c) $\{[u, v] \in \mathbf{R}^2 : v \in \langle -1, 0) \cup (0, 1)\}$
(d) $\{[u, v] \in \mathbf{R}^2 : v \in (-\infty, -1)\}$

Příklad 4: $y(x) = -\sqrt{2 \cdot \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \cdot (1 - \sin x - 2\log(1 - \sin x))}$

Příklad 5: Fundamentální systém tvoří například trojice vektorových funkcí:
$\mathbf{y}^1(x) = [-\frac{1}{2}e^{3x}, \frac{1}{2}e^{3x}, e^{3x}]$, $\mathbf{y}^2(x) = [e^{-x}, e^{-x}, e^{-x}]$, $\mathbf{y}^3(x) = [xe^{-x} - \frac{1}{7}e^{-x}, xe^{-x}, xe^{-x}]$.
Obecné řešení pak má tvar $\mathbf{y} = a\mathbf{y}^1 + b\mathbf{y}^2 + c\mathbf{y}^3$.
Má-li $\mathbf{y}$ tento tvar, pak limita funkce $e^x y_1(x)$ v $-\infty$ je rovna:
$-\infty$, pokud $c > 0$; $+\infty$, pokud $c < 0$;
b, pokud $c = 0$.