Písemná zkouška z Matematiky IV pro IES FSV UK (D)
LS 2011-2012

Příklad 1: Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice
$$y^{(4)} + 4y'' + 4y = xe^x$$
Která z těchto řešení jsou omezená na intervalu $(-\infty, 0)$?

(12 bodů)

Příklad 2: Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice
$$y' = x \cdot \frac{\sqrt{(y+4)(2-y)}}{y+1}$$
a načrtněte jejich grafy.

(12 bodů)

Příklad 3: Uvažujme následující autonomní rovnici:
$$y' = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} y} \cdot (1 - \operatorname{arctg} y)}{\operatorname{arctg}(y+1)}$$
Na základě vyšetření definičních oborů a průběhu řešení určete a načrtněte následující množiny:

(a) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází více než jedno maximální řešení.
(b) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno maximální řešení.
(c) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno řešení definované na $\mathbf{R}$.
(d) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké klesající maximální řešení.

(12 bodů)

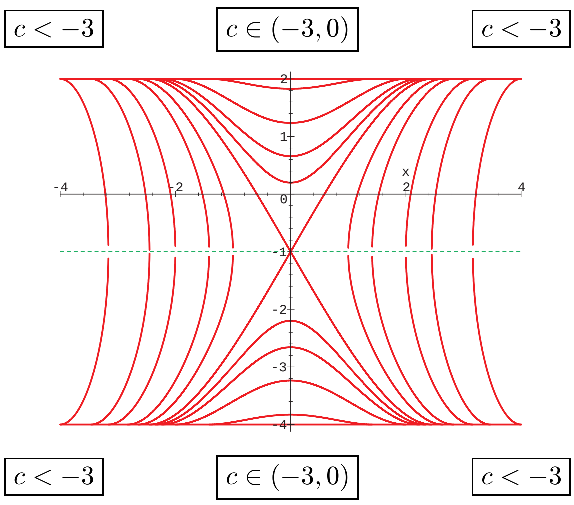
Příklad 4: Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice
$$y' + y \cdot \frac{\cos x}{\sin x + 1} = \sin x.$$
Spočtěte limitu v bodě $\frac{3}{2}\pi$ zleva pro všechna maximální řešení, pro která má tato limita smysl. (12 bodů)

Příklad 5: Uvažujme následující soustavu:
$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y},$$
kde $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4]$ je neznámá vektorová funkce. Nalezněte obecný tvar y_4 (tj. čtvrté složky řešení). Na základě toho nalezněte všechna řešení soustavy, která jsou omezená na $\mathbf{R}$. (12 bodů)

Výsledky písemky z Matematiky IV pro IES FSV UK (D)
LS 2011-2012

Příklad 1: Maximální řešení jsou: $y(x) = (\frac{1}{9}x - \frac{4}{27})e^x + (ax+b)\cos(\sqrt{2}x) + (cx+d)\sin(\sqrt{2}x)$, $x \in \mathbf{R}$ $(a,b,c,d \in \mathbf{R})$. Omezená na $(-\infty, 0)$ jsou právě ta z uvedených řešení, která splňují $a = c = 0$.

Příklad 2: Maximální řešení jsou:
$y(x) = -4$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = 2$, $x \in \mathbf{R}$.
V následujících řešeních je $c \in (-3, 0)$ libovolné.
$$y(x) = \begin{cases} -4, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}\rangle, \\ -1 - \sqrt{9 - (\frac{x^2}{2} + c)^2}, & x \in (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}), \\ -4, & x \in \langle\sqrt{-2c}, +\infty); \end{cases}$$
$$y(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}\rangle, \\ -1 + \sqrt{9 - (\frac{x^2}{2} + c)^2}, & x \in (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}), \\ 2, & x \in \langle\sqrt{-2c}, +\infty). \end{cases}$$
V následujících řešeních je $c \leq -3$ libovolné.
$$y(x) = \begin{cases} -4, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}\rangle, \\ -1 - \sqrt{9 - (\frac{x^2}{2} + c)^2}, & x \in (-\sqrt{-2c}, -\sqrt{-6-2c}); \end{cases}$$
$$y(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}\rangle, \\ -1 + \sqrt{9 - (\frac{x^2}{2} + c)^2}, & x \in (-\sqrt{-2c}, -\sqrt{-6-2c}); \end{cases}$$
$$y(x) = \begin{cases} -1 - \sqrt{9 - (\frac{x^2}{2} + c)^2}, & x \in (\sqrt{-6-2c}, \sqrt{-2c}), \\ -4, & x \in \langle\sqrt{-2c}, +\infty); \end{cases}$$
$$y(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{9 - (\frac{x^2}{2} + c)^2}, & x \in (\sqrt{-6-2c}, \sqrt{-2c}), \\ 2, & x \in \langle\sqrt{-2c}, +\infty). \end{cases}$$



Příklad 3:
(a) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v = 0\}$
(b) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}\}$
(c) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v \in (0, +\infty)\}$
(d) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v \in (\operatorname{tg} 1, +\infty)\}$

Příklad 4: Maximální řešení jsou: $y(x) = \frac{\frac{x}{2} - \cos x - \frac{1}{4}\sin 2x + c}{\sin x + 1}$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$ ($k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$). Limitu v bodě $\frac{3}{2}\pi$ zleva má smysl počítat pro řešení definovaná na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ (tj. pokud $k = 0$). Limita je rovna $+\infty$, pokud $c > -\frac{3}{4}\pi$; 0, pokud $c = -\frac{3}{4}\pi$; $-\infty$, pokud $c < -\frac{3}{4}\pi$.

Příklad 5: $y_4(x) = a + be^x + ce^{\frac{5+\sqrt{37}}{2}x} + de^{\frac{5-\sqrt{37}}{2}x}$, $x \in \mathbf{R}$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$). Funkce y_4 je omezená na $\mathbf{R}$, právě když $b = c = d = 0$. V tomto případě $\mathbf{y}(x) = [a, -a, -a, a]$, $x \in \mathbf{R}$ ($a \in \mathbf{R}$). Toto řešení je rovněž omezené na $\mathbf{R}$.
Poznámka o tom, co bylo třeba počítat a co nikoli: Bylo třeba nejprve provést eliminaci příslušné λ-matice, poslední řádek přepsat zpět na diferenciální rovnici s neznámou y_4 a tu vyřešit. Je to lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu s konstantními koeficienty, kořeny jejího charakteristického polynomy vyšly 0, 1, $\frac{5+\sqrt{37}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{37}}{2}$. Dále zjistit, která z řešení této rovnice jsou omezená na $\mathbf{R}$ – jsou to konstantní řešení. Pro tato konstatní řešení pak dopočítat y_3, y_2 a y_1 pomocí třetí, druhé a první rovnice (tj. pomocí rovnic vzniklých přepisem třetího, druhého a první řádku výsledné trojúhelníkové matice zpět na diferenciální rovnice). To bylo ovšem snadné, protože y_4 bylo konstantní.
Co nebylo třeba počítat: Obecný tvar y_3, y_2 a y_1. To je sice teoreticky jednoduché, v tomto konkrétním případě spíše mechanické, nicméně dosti pracné a časově náročné.
Studentům, kteří navzdory formulaci zadání a navzdory explicitnímu upozornění před začátkem písemky počítali i obecný tvar y_3, y_2 a y_1 (a tím ztratili spoustu času), lze jen doporučit pořádně číst zadání a více naslouchat upozorněním pedagogů.