Písemná zkouška z Matematiky IV pro IES FSV UK (C)
LS 2011-2012

Příklad 1: Najděte všechna řešení diferenční rovnice

$$y(n+3)+5y(n+2)-6y(n)=26n+1$$

Která z těchto řešení mají pro $n\to+\infty$? Jakých hodnot může tato limita nabývat?

(12 bodů)

Příklad 2: Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'=xe^{-y}\sqrt[3]{e^y-1}$$

a načrtněte jejich grafy.

(12 bodů)

Příklad 3: Uvažujme následující autonomní rovnici:

$$y'=\log(1+y^2)\cdot\sqrt[3]{y^3+8}$$

Na základě vyšetření definičních oborů a průběhu řešení určete a načrtněte následující množiny:

(a) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází více než jedno maximální řešení.
(b) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno maximální řešení.
(c) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké rostoucí maximální řešení.
(d) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké nerostoucí maximální řešení.

(12 bodů)

Příklad 4: Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'+x^2y=x^5\sqrt{y},$$

která splňující počáteční podmínku $y(0)=36$. (12 bodů)

Příklad 5: Najděte fundamentální systém řešení soustavy

$$\mathbf{y}'=\begin{pmatrix}0&5&-3\\-2&9&-5\\-2&8&-4\end{pmatrix}\cdot\mathbf{y}.$$

Pro každé řešení $\mathbf{y}$ soustavy spočtěte $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot y_1(x)$. (12 bodů)

Výsledky písemky z Matematiky IV pro IES FSV UK (C)
LS 2011-2012

Příklad 1: $\{y(n)\}=\{n^2-\frac{28}{13}n+a+b\cdot(-3+\sqrt{3})^n+c\cdot(-3-\sqrt{3})^n$, $a,b,c\in\mathbf{R}$. Limitu pro $n\to+\infty$ mají právě ta řešení, pro která je $b=c=0$. Tato limita je pak rovna $+\infty$.

Příklad 2: Maximální řešení jsou: $y(x)=0$, $x\in\mathbf{R}$;

$y(x)=\log\left(1+\sqrt{\frac{(x^2+2c)^3}{27}}\right)$, $x\in\mathbf{R}$ $(c>0)$; $y(x)=\log\left(1-\sqrt{\frac{(x^2+2c)^3}{27}}\right)$, $x\in(-\sqrt{3-2c},\sqrt{3-2c})$ $(c\in(0,\frac{3}{2}))$;

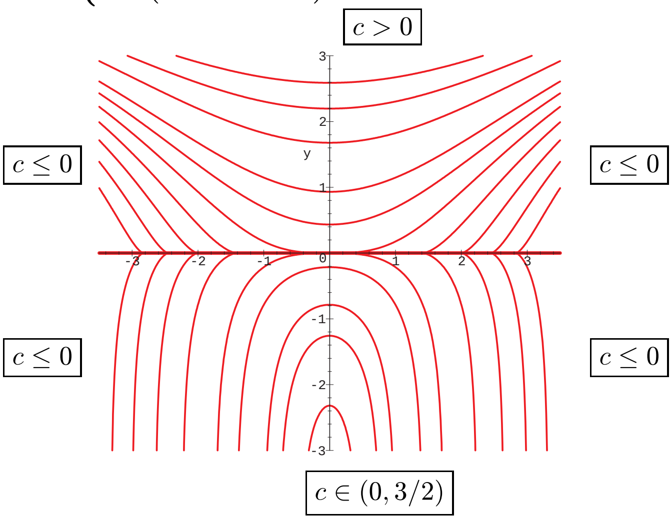
V následujících řešeních jsou $c,d\le 0$ libovolná.

$$y(x)=\begin{cases}\log\left(1+\sqrt{\frac{(x^2+2c)^3}{27}}\right), & x\in(-\infty,-\sqrt{-2c}),\\ 0, & x\in\langle-\sqrt{-2c},+\infty),\end{cases};\quad y(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,\sqrt{-2c}\rangle,\\ \log\left(1+\sqrt{\frac{(x^2+2c)^3}{27}}\right), & x\in(\sqrt{-2c},+\infty);\end{cases}$$

$$y(x)=\begin{cases}\log\left(1+\sqrt{\frac{(x^2+2c)^3}{27}}\right), & x\in(-\infty,-\sqrt{-2c}),\\ 0, & x\in\langle-\sqrt{-2c},\sqrt{-2d}\rangle,\\ \log\left(1+\sqrt{\frac{(x^2+2d)^3}{27}}\right), & x\in(\sqrt{-2d},+\infty);\end{cases}\quad y(x)=\begin{cases}\log\left(1-\sqrt{\frac{(x^2+2c)^3}{27}}\right), & x\in(-\sqrt{3-2c},-\sqrt{-2c}),\\ 0, & x\in\langle-\sqrt{-2c},+\infty);\end{cases}$$

$$y(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,\sqrt{-2c}\rangle,\\ \log\left(1-\sqrt{\frac{(x^2+2c)^3}{27}}\right), & x\in(\sqrt{-2c},\sqrt{3-2c});\end{cases}\quad y(x)=\begin{cases}\log\left(1-\sqrt{\frac{(x^2+2c)^3}{27}}\right), & x\in(-\sqrt{3-2c},-\sqrt{-2c}),\\ 0, & x\in\langle-\sqrt{-2c},\sqrt{-2d}\rangle,\\ \log\left(1-\sqrt{\frac{(x^2+2d)^3}{27}}\right), & x\in(\sqrt{-2d},\sqrt{3-2d});\end{cases}$$

$$y(x)=\begin{cases}\log\left(1-\sqrt{\frac{(x^2+2c)^3}{27}}\right), & x\in(-\sqrt{3-2c},-\sqrt{-2c}),\\ 0, & x\in\langle-\sqrt{-2c},\sqrt{-2d}\rangle,\\ \log\left(1+\sqrt{\frac{(x^2+2d)^3}{27}}\right), & x\in(\sqrt{-2d},+\infty);\end{cases}\qquad y(x)=\begin{cases}\log\left(1+\sqrt{\frac{(x^2+2c)^3}{27}}\right), & x\in(-\infty,-\sqrt{-2c}),\\ 0, & x\in\langle-\sqrt{-2c},\sqrt{-2d}\rangle,\\ \log\left(1-\sqrt{\frac{(x^2+2d)^3}{27}}\right), & x\in(\sqrt{-2d},\sqrt{3-2d}).\end{cases}$$



Příklad 3:
(a) $\{[u,v]\in\mathbf{R}^2 : v=-2\}$
(b) $\{[u,v]\in\mathbf{R}^2 : v\in\mathbf{R}\setminus\{-2\}\}$
(c) $\{[u,v]\in\mathbf{R}^2 : v\in(0,+\infty)\}$
(d) $\{[u,v]\in\mathbf{R}^2 : v\in(-\infty,-2\rangle\cup\{0\}\}$

Poznámka: Příslušný integrál u $-\infty$ i u $+\infty$ diverguje. Nelze to zjistit pomocí vět z přednášky; plyne to z limitního srovnávacího kritéria (Věta 8.53 ze skript) a z toho, že $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\log x}\,dx$ diverguje. Odpovědi na otázky a)-d) však na konvergenci či divergenci příslušného integrálu u $\pm\infty$ nezávisí.

Příklad 4:
$y(x)=(x^3-6+12e^{-x^3/6})^2$, $x\in\mathbf{R}$. (To, že definiční obor je $\mathbf{R}$, není snadné. Plyne to z toho, že výraz v závorce je vždy kladný. Rovnice sama má řešení $y=0$ na $\mathbf{R}$, kladná řešení mají tvar $y(x)=(x^3-6+ce^{-x^3/6})^2$ na maximálních otevřených intervalech, na nichž je výraz v závorce kladný. Pro $c>6$ to platí na $\mathbf{R}$, pro $c\in(0,6)$ na dvou intervalech tvaru $(-\infty,x_1)$ a $(x_2,+\infty)$, pro $c\le 0$ na jednom intervalu tvaru $(x_0,+\infty)$. Tato řešení se navíc dají slepit s nulovým řešením.) [Ke správnému řešení nebyla vyžadována uvedená analýza, která je náročnější, ale alespoň poznámka o tom, že řešení jsou definována tam, kde výraz v závorce je kladný, a zmínka o možném lepení s nulovým řešením.]

Příklad 5: Fundamentální systém tvoří například trojice vektorových funkcí:
$\mathbf{y}^1(x)=[-\frac{1}{2}e^x,\frac{1}{2}e^x,e^x]$, $\mathbf{y}^2(x)=[e^{2x},e^{2x},e^{2x}]$, $\mathbf{y}^3(x)=[xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x},xe^{2x},xe^{2x}]$.
Obecné řešení pak má tvar $\mathbf{y}=a\mathbf{y}^1+b\mathbf{y}^2+c\mathbf{y}^3$.
Má-li $\mathbf{y}$ tento tvar, pak limita funkce $e^{-x}y_1(x)$ v $+\infty$ je rovna:
$+\infty$, pokud $c>0$; $-\infty$, pokud $c<0$;
$+\infty$, pokud $c=0$ a $b>0$; $-\infty$, pokud $c=0$ a $b<0$;
$-\frac{a}{2}$, pokud $b=c=0$.