Písemná zkouška z Matematiky IV pro IES FSV UK (B)
LS 2011-2012

Příklad 1: Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice
$$y''' + y'' + 3y' - 5y = \cos 2x$$
Která z těchto řešení mají limitu v $+\infty$? Jakých hodnot může tato limita nabývat?

(12 bodů)

Příklad 2: Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice
$$y' = \frac{e^y - e^{-y}}{e^x + e^{-x}},$$
spočtěte jejich limity v krajních bodech definičního oboru a načrtněte jejich grafy.

(12 bodů)

Příklad 3: Uvažujme následující autonomní rovnici:
$$y' = \log(1 - \sqrt[3]{y}) \cdot \frac{y+1}{y+2}$$
Na základě vyšetření definičních oborů a průběhu řešení určete a načrtněte následující množiny:

(a) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází více než jedno maximální řešení.
(b) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno maximální řešení.
(c) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké nerostoucí řešení definované na $\mathbf{R}$.
(d) Množinu bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké klesající maximální řešení.

(12 bodů)

Příklad 4: Uvažme následující diferenciální rovnici:
$$y' - \frac{y}{x} = y^3 \cos x.$$
Ukažte, že existuje řešení této rovnice splňující počáteční podmínku $y(\pi) = \sqrt{\pi}$, a vypočtěte, jaký má tvar na okolí bodu π. (12 bodů)

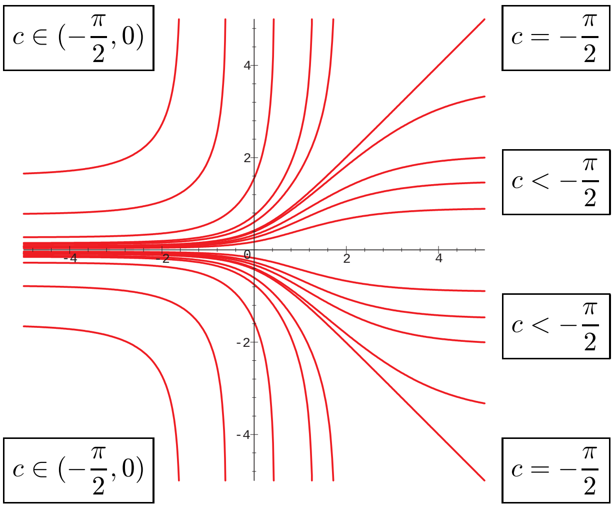
Příklad 5: Najděte fundamentální systém řešení soustavy
$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 13 \\ -8 & -7 & -21 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}.$$
Určete všechna řešení soustavy, která mají v $+\infty$ limitu $[0,0,0]$. (12 bodů)

- -

Výsledky písemky z Matematiky IV pro IES FSV UK (B)
LS 2011-2012

Příklad 1: Všechna maximální řešení: $y(x) = -\frac{9}{85}\cos 2x - \frac{2}{85}\sin 2x + ae^x + be^{-x}\cos 2x + ce^{-x}\sin 2x$, $x \in \mathbf{R}$, $a,b,c \in \mathbf{R}$. Uvedené řešení má v $+\infty$ limitu, právě když $a \neq 0$. Pro $a > 0$ je limita rovna $+\infty$, pro $a < 0$ je limita rovna $-\infty$.

Příklad 2: Všechna maximální řešení: Stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbf{R}$. Dále řešení vzorcem $y(x) = \log \frac{1+\exp(2\operatorname{arctg} x + 2c)}{1-\exp(2\operatorname{arctg} x + 2c)}$ nebo vzorcem $y(x) = \log \frac{1-\exp(2\operatorname{arctg} x + 2c)}{1+\exp(2\operatorname{arctg} x + 2c)}$ definovaná na $\mathbf{R}$, je-li $c \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}\rangle$; na $(-\infty, \log(\operatorname{tg}(-c)))$, je-li $c \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Limita v $-\infty$ je nula pro stacionární řešení, $\log\frac{1+e^{2c}}{1-e^{2c}}$ pro řešení daná prvním vzorcem, $\log\frac{1-e^{2c}}{1+e^{2c}}$ pro řešení daná druhým vzorcem. Limita v $+\infty$ je nula pro stacionární řešení; pokud $c < -\frac{\pi}{2}$, pak $\log\frac{1+e^{\pi+2c}}{1-e^{\pi+2c}}$ pro řešení daná prvním vzorcem, $\log\frac{1-e^{\pi 2c}}{1+e^{\pi+2c}}$ pro řešení daná druhým vzorcem; pokud $c = -\frac{\pi}{2}$, pak $+\infty$ pro řešení daná prvním vzorcem, $-\infty$ pro řešení daná druhým vzorcem. Pokud $c \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, je limita v pravém krajním bodě $+\infty$ pro řešení daná prvním vzorcem, $-\infty$ pro řešení daná druhým vzorcem.



Příklad 3: (a) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v = 0\}$; (b) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v \in (-\infty,-2) \cup (-2,0) \cup (0,1)\}$
(c) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v = -1 \text{ nebo } v = 0\}$; (d) $\{[u,v] \in \mathbf{R}^2 : v \in (-2,-1)\}$

Příklad 4: $y(x) = \frac{1}{\sqrt{-2\sin x - \frac{4}{x}\cos x + \frac{4}{x^2}\sin x - \frac{3\pi}{x}^2}}$ na nějakém okolí bodu π. (Přesněji na maximálním otevřeném intervalu, který obsahuje bod π a na němž je výraz pod odmocninou kladný.)

Příklad 5: Fundamentální systém tvoří například trojice vektorových funkcí: $[3e^{2x}, -5e^{2x}, e^{2x}]$, $[3xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}, e^{2x} - 5xe^{2x}, xe^{2x}]$, $[-e^x, e^x, 0]$. Nulovou limitu v $+\infty$ má pouze konstantní nulové řešení.