Písemná zkouška z Matematiky III pro IES FSV UK (D)
ZS 2011-2012

Příklad 1 : Najděte primitivní funkci (včetně určení intervalů existence)

$$\int \frac{\sin^2 x + \cos x}{\sin x \cdot (1 - \cos^3 x)}\, \mathrm{d}x. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Nechť Q je kvadratická forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy Q (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $Q\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

Příklad 3 : Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 33 & 3 & -40 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + \sin x)^x + (\cos x)^x - \sin^2 x}{\operatorname{tg}^4 x} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 5 : Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

$$f(x, y) = e^{(x - y^2)} \cdot \left(x^2 - 2\sqrt{2} \cdot y - 1\right), \quad M = \mathbf{R}^2. \qquad \text{(12 bodů)}$$

– –

Výsledky písemky z Matematiky III pro IES FSV UK (D)
ZS 2011-2012

Příklad 1: (Až na konstantu) $\frac{1}{6(\cos x - 1)} + \frac{5}{12} \log(1 - \cos x) - \frac{1}{4} \log(1 + \cos x) - \frac{1}{3} \log(\cos^2 x + \cos x + 1) - \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2\cos x + 1}{\sqrt{3}}$ na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Lze použít substituci $y = \cos x$.
Příklad 2: ID; 16.
Příklad 3: Vlastní čísla: 2 násobnosti 1, -4 násobnosti 2. Vlastní vektory k číslu 2: $t \cdot [1, 7, 1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; k číslu -4: $t \cdot [1, 1, 1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$
Příklad 4: $+\infty$ (Není třeba používat Taylorův polynom. Čitatel má v bodě 0 limitu 2, jmenovatel má limitu 0 a je na prstencovém okolí nuly kladný.)
Příklad 5: Ostré lokální minimum v bodě $[1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$; ostré lokální maximum v bodě $[-2, -\frac{\sqrt{2}}{4}]$. (Sedlový bod $[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$.)