Písemná zkouška z Matematiky III pro IES FSV UK (B)
ZS 2011-2012

Příklad 1 : Najděte primitivní funkci (včetně určení intervalů existence)

$$\int \frac{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}{4(4x^2+x+1)-(8x+1)\sqrt{4x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Nechť Q je kvadratická forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 13 & 7 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 18 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $Q\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

Příklad 3 : Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^{(x^2)}-1)+2\sin(\cos(x)-1)}{\log(1+x^4)} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 5 : Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

$$f(x,y) = \log(x^2+y^2) - x^2 - y^3, \quad M = \mathbf{R}^2 \setminus \{[0,0]\}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

– –

Výsledky písemky z Matematiky III pro IES FSV UK (B)
ZS 2011-2012

Příklad 1: (Až na konstantu) $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4\sqrt{4x^2+x+1}-8x-1} - \frac{1}{8}\log\left(4\sqrt{4x^2+x+1}-8x-1\right)$ na $\mathbf{R}$. Lze použít substituci $y = \sqrt{4x^2+x+1}-2x$ a tím převést na integraci racionální funkce.
Příklad 2: PSD, nikoli PD; 27.
Příklad 3: Vlastní čísla 2, -2, 4; všechna násobnosti 1. Vlastní vektory k číslu 2: $t\cdot[2,-1,1]$, $t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$; k číslu -2: $t\cdot[-2,1,1]$, $t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$; k číslu 4: $t\cdot[0,-1,1]$, $t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$.
Příklad 4: $\frac{7}{12}$
Příklad 5: Ostré lokální maximum v bodech $[\pm\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}]$. (Sedlové body $[\pm 1, 0]$ a $[0, \sqrt[3]{\frac{2}{3}}]$.)