

Písenná zkouška z Matematiky III pro IES FSV UK (A)

ZS 2011-2012

Příklad 1 : Najděte primitivní funkci (včetně určení intervalů existence)

$$\int \frac{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{1 - \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}} dx. \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Nechť Q je kvadratická forma reprezentovaná maticí \mathbb{A} , kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -50 & 10 & 10 & 15 \\ 10 & -12 & 8 & -3 \\ 10 & 8 & -72 & 27 \\ 15 & -3 & 27 & -32 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $Q\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

Příklad 3 : Určete vlastní čísla matice \mathbb{B} a všechny jim příslušné vlastní vektory.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & 25 & 25 \\ 0 & -15 & -18 \\ -1 & 11 & 14 \end{pmatrix} \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 4 : Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin x) - \exp(x \sin x) + \cos(x \sin x)}{\sin^4 x} \quad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 5 : Nalezněte všechny lokální extrémů funkce f v množině M , kde

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2} - y^2\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{4} + y\right), \quad M = \mathbf{R}^2. \quad (12 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky III pro IES FSV UK (A)

ZS 2011-2012

Příklad 1: (až na konstantu) $-\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)^2} - \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}-1} - \frac{3}{4} \log\left|\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right| - \frac{1}{2\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)}$

$\frac{1}{4} \log\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right) + \frac{1}{2} \log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right) - \operatorname{arctg}\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$ na každém z intervalů $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$.

Lze použít substituci $y = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$.

Příklad 2: ND, -52 .

Příklad 3: Vlastní čísla $3, 3i, -3i$, všechna násobnosti 1; vlastní vektory k číslu 3: $[0, -t, t]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; k $3i$: $t \cdot [17 - 6i, -15 + 3i, 13]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; k $-3i$: $t \cdot [17 + 6i, -15 - 3i, 13]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 4: $-\frac{3}{2}$

Příklad 5: Ostré lokální maximum v bodě $[4, -1]$. (Sedlový bod $[-4, -1]$.)