Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (B)

LS 2010-2011

Příklad 1 : Spočtěte inverzní matici k matici $\mathbb{A}$. (Návod: Nechť $\mathbb{B}$ je matice, která vznikne z $\mathbb{A}$ vynásobením druhého řádku číslem $\frac{1}{3}$, třetího řádku číslem $\frac{1}{9}$ a čtvrtého řádku číslem $\frac{1}{27}$. Spočtěte nejprve $\mathbb{B}^{-1}$ a z toho odvoďte $\mathbb{A}^{-1}$.):

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 3 & 3 & 9 & 27 \\ 9 & 9 & 9 & 27 \\ 27 & 27 & 27 & 27 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \log \frac{x^2 + y + 1}{1 - \sqrt{x}},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[4, -18, f(4, -18)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$e^{(x^2+y-2)} + e^{(y^2-x)} = 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x, y, z) = x + 2z, \quad M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = 4, z + y^2 \leq 1\right\} \qquad \text{(18 bodů)}$$

Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

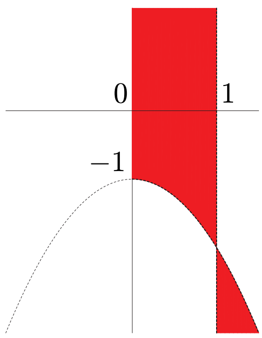
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(1 - \sin \frac{1}{n}\right) \qquad \text{(12 bodů)}$$

Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (B)

LS 2010-2011

Příklad 1: $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & \frac{1}{18} & -\frac{1}{54} \end{pmatrix} \left(\mathbb{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right).$

Příklad 2: $D_f = \{[x, y] : (x \in \langle 0, 1) \text{ a } y > -x^2 - 1) \text{ nebo } (x > 1 \text{ a } y < -x^2 - 1)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1-\sqrt{x}}{x^2+y+1} \cdot \frac{2x(1-\sqrt{x}) + \frac{x^2+y+1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2}$, je-li $(x \in (0, 1) \text{ a } y > -x^2 - 1)$ nebo $(x > 1 \text{ a } y < -x^2 - 1)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2+y+1}$ pro $[x, y] \in D_f$. $\frac{\partial f}{\partial x}$ v bodech $[0, y]$ smysl počítat, protože funkce není definovaná na žádné úsečce příslušného směru. Tečná rovina: $z = -\frac{33}{4}(x - 4) - (y + 18)$.
Definiční obor:



Příklad 3: $f'(1) = -\frac{1}{3}$, $f''(1) = -\frac{70}{27}$, rovnice tečny je $y = 1 - \frac{1}{3}(x - 1)$.
Příklad 4: Minimum ani infimum neexistuje, f není na M zdola omezená ($[2, 0, -n] \in M$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $f(2, 0, -n) \to -\infty$). Maximum 4 v bodě $[2, 0, 1]$. Že to je skutečně maximum plyne z toho, že například $\{[x, y, z] \in M : f(x, y, z) \geq 0\}$ je kompaktní.
Příklad 5: Konverguje neabsolutně. Pro konvergenci lze použít Leibnizovo kritérium, pro divergenci řady absolutních hodnot limitní srovnávací kritérium a srovnání s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.