Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (A)

LS 2010-2011

Příklad 1 : Určete hodnost následující matice v závislosti na parametrech $x, y \in \mathbf{R}$:

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 20+x & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 40+y \end{pmatrix}. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y - \sin x}{y}},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[0, 5, f(0,5)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\cos(x + y^2) + \sin(x^2 + y) = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[-1, -1]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(-1)$ a $f''(-1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě -1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = x^2 y, \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, xz \geq 1\right\} \qquad (18 \text{ bodů})$$

Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[3]{n} \cdot \left(\sqrt[3]{n^2 - 7} - \sqrt[3]{n^2 - 1}\right) \qquad (12 \text{ bodů})$$

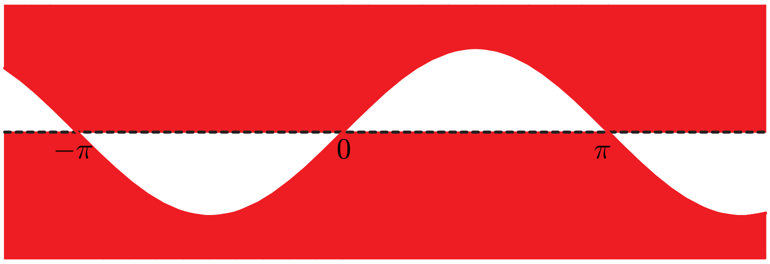
Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (A)

LS 2010-2011

Příklad 1: Je-li $x \neq 2$ a $y \neq 4$, je hodnost 4; je-li $x = 2$ a $y \neq 4$, je hodnost 3; je-li $x \neq 2$ a $y = 4$, je hodnost 3; je-li $x = 2$ a $y = 4$, je hodnost 2.

Příklad 2: $D_f = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : (y > 0 \text{ a } y \geq \sin x) \text{ nebo } (y < 0 \text{ a } y \leq \sin x)\}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{y - \sin x}} \cdot \frac{-\cos x}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{y - \sin x}} \cdot \frac{\sin x}{y^2}$, obě parciální derivace pro body $[x,y]$ splňující $y > 0$ a $y > \sin x$ nebo $y < 0$ a $y < \sin x$. Z parciálních derivací v bodech splňujících $y = \sin x$, $y \neq 0$, má smysl počítat jen $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1)$ pro $k \in \mathbf{Z}$, ty však neexistují. Zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, protože funkce není definovaná na žádné úsečce příslušného směru. Tečná rovina: $z = 1 - \frac{1}{10}x$.

Definiční obor:



Příklad 3: $f'(-1) = 2$, $f''(-1) = 7$, rovnice tečny je $y = -1 + 2(x+1)$.

Příklad 4: Maximum $\frac{2}{9}\sqrt{3}\sqrt{14 + 5\sqrt{10}}$ v bodech $\left[\pm\sqrt{\frac{4+\sqrt{10}}{3}}, \sqrt{\frac{2\sqrt{10}-3}{3}}, \pm\sqrt{\frac{3}{4+\sqrt{10}}}\right]$ (znaménka jsou stejná), minimum $-\frac{2}{9}\sqrt{3}\sqrt{14 + 5\sqrt{10}}$ v bodech $\left[\pm\sqrt{\frac{4+\sqrt{10}}{3}}, -\sqrt{\frac{2\sqrt{10}-3}{3}}, \pm\sqrt{\frac{3}{4+\sqrt{10}}}\right]$ (znaménka jsou stejná).

Příklad 5: Konverguje neabsolutně. Pro konvergenci lze použít Leibnizovo kritérium; pro divergenci řady absolutních hodnot lze použít limitní srovnávací kritérium a srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.