Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (B)
ZS 2010-2011

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n + \left(\frac{3n+1}{n+3}\right)^n} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 1} \frac{4^{(2^x)} - 16}{\sqrt{1-\cos(2\pi x)}} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (x - [x]) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad [\dots] \text{ znamená celou část}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt[9]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 3}}. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (B)
ZS 2010-2011

Příklad 1: 3 (lze použít větu o policajtech)
Příklad 2: Limita neexistuje. Limita zleva je $-\frac{32}{\pi}\sqrt{2}\cdot\log^2 2$, limita zprava je $\frac{32}{\pi}\sqrt{2}\cdot\log^2 2$.
Příklad 3: $D_f = \mathbf{R}$. f je spojitá v každém bodě $\mathbf{R}\setminus\{k\in\mathbf{Z} : k \text{ liché}\}$; v bodech $k\in\mathbf{Z}$ liché je spojitá zprava a nespojitá zleva. Pro $x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ je $f'(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{\pi}{2}(x-[x])\cos(\frac{\pi}{2}x)$. Pro $k\in\mathbf{Z}$ sudé je $f'_+(k) = 0$ a $f'_-(k) = (-1)^{k/2}\cdot\frac{\pi}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & k = 4l, l\in\mathbf{Z}, \\ -\frac{\pi}{2} & k = 4l+2, l\in\mathbf{Z}. \end{cases}$ Pro $k\in\mathbf{Z}$ liché je $f'_+(k) = \sin(\frac{\pi}{2}k) = \begin{cases} 1 & k = 4l+1, l\in\mathbf{Z}, \\ -1 & k = 4l+3, l\in\mathbf{Z}; \end{cases}$ a $f'_-(k) = \begin{cases} -\infty & k = 4l+1, l\in\mathbf{Z}, \\ +\infty & k = 4l+3, l\in\mathbf{Z}. \end{cases}$
Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}\setminus\{27\}$, f je spojitá v každém bodě D_f, limita v $-\infty$ je $-\infty$, limita v $+\infty$ je $+\infty$, limita v 27 zleva $-\infty$ a zprava $+\infty$. f je rostoucí na $(-\infty, 0\rangle$, klesající na $\langle 0, 27)$, klesající na $(27, \frac{1000}{27}\rangle$, rostoucí na $\langle\frac{1000}{27}, +\infty)$; $f'(0) = 0$ (je třeba dopočítat zvlášť), v bodě 0 je lokální maximum (hodnota 0), v bodě $\frac{1000}{27}$ lokální minimum (hodnota $\frac{1000}{27}\sqrt[3]{10}$); $H_f = (-\infty, 0\rangle \cup \langle\frac{1000}{27}\sqrt[3]{10}, +\infty)$. f je konkávní na $(-\infty, 27)$, konvexní na $(27, 125)$, konkávní na $(125, +\infty)$. V bodě 125 je inflexní bod. f nemá asymptoty. Graf: