

Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (A)
ZS 2010-2011

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n^2+1}] + [\sqrt[3]{n^3+1}] + [\sqrt[4]{n^4+1}]}{\log(1^n + 2^n + \dots + n^n)} \cdot \log n \quad [\dots] \text{ znamená celou část} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (2 \cos x)^{\frac{\sqrt{3}}{\pi-3x}} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{2^{|x^2-1|} - 2}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x \cdot \exp\left(-\frac{1}{\log^2 x}\right). \quad (20 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (A)
ZS 2010-2011

Příklad 1: 3 (lze použít větu o policajtech)

Příklad 2: e

Příklad 3: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá na \mathbf{R} . $f'(x) = \frac{2^{|x^2-1|} \cdot \log 2 \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1) \cdot 2x}{3 \sqrt[3]{(2^{|x^2-1|}-2)^2}}$ pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}$;

$f'(-\sqrt{2}) = -\infty$, $f'_-(-1) = -\frac{2}{3} \log 2$, $f'_+(-1) = \frac{2}{3} \log 2$, $f'_-(0) = +\infty$, $f'_+(0) = -\infty$, $f'_-(1) = -\frac{2}{3} \log 2$, $f'_+(1) = \frac{2}{3} \log 2$, $f'(\sqrt{2}) = +\infty$.

Příklad 4: $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, f je spojitá v každém bodě D_f . Limita v 0 zprava je 0, limita v 1 je 0, limita v $+\infty$ je $+\infty$. Funkce f je rostoucí na $(0, \exp(-\sqrt[3]{2}))$, klesající na $(\exp(-\sqrt[3]{2}), 1)$, rostoucí na $(1, +\infty)$; v bodě $\exp(-\sqrt[3]{2})$ je lokální maximum, $H_f = (0, +\infty)$. Funkce f je konkávní na $(0, \exp(1-\sqrt{3}))$, konvexní na $(\exp(1-\sqrt{3}), 1)$, konvexní na $(1, e)$, konkávní na $(e, \exp(1+\sqrt{3}))$, konvexní na $(\exp(1+\sqrt{3}), +\infty)$; inflexní body jsou $\exp(1-\sqrt{3})$, e , $\exp(1+\sqrt{3})$. Asymptota v $+\infty$ neexistuje (v $-\infty$ ji nemá smysl počítat). Graf:

