Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (E)
ZS 2009-2010

Příklad 1: Pro funkci

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z^2)}{1 - \cos z}$$

najděte všechny kořeny a izolované singularity. Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x - \sin x}{3 + \cos x}\, \mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)(x+4)}\, \mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (E)
ZS 2009-2010
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek: f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. V bodech $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ má pól násobnosti 2; v bodě 0 je odstranitelná singularita, po dodefinování je tam kořen násobnosti 2. Kořeny jsou v bodech $\pm\sqrt{2k\pi}$ a $\pm i\sqrt{2k\pi}$, $k \in \mathbf{N}$, všechny násobnosti 2.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Čitatel i jmenovatel jsou celé funkce.
2) Jmenovatel má kořeny v bodech $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, všechny násobnosti 2 (2 body).
3) Čitatel má kořen 0 násobnosti 4 (je vidět z tvaru mocninné řady, 2 body) a kořeny $\pm\sqrt{2k\pi}$, $\pm i\sqrt{2k\pi}$ pro $k \in \mathbf{N}$, všechny násobnosti 2 (lze dokázat pomocí derivování, 3 body)
4) Kombinací předchozího dostaneme výsledek. (3 body)

Příklad 2: Výsledek: $\frac{\pi}{2}(4-3\sqrt{2})$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Nechť φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 1. Pak integrál ze zadání je roven $\int_\varphi \frac{(1-i)z^2-1-i}{z(z^2+6z+1)}\,\mathrm{d}z$. Ten spočítáme podle reziduové věty. (5 bodů)
2) Integrovaná funkce je funkce racionální, s póly v bodech 0, $-3+\sqrt{8}$, $-3-\sqrt{8}$; všechny násobnosti 1. Přičemž bod $-3-\sqrt{8}$ je mimo jednotkový kruh (index je v něm 0) a body 0, a $-3+\sqrt{8}$ jsou uvnitř jednotkového kruhu (index je v nich 1). (5 bodů)
3) Spočteme rezidua:
(i) Reziduum v bodě 0 je $-1-i$. (2 body)
(ii) Reziduum v bodě $-3+\sqrt{8}$ je $1-i\frac{9-3\sqrt{8}}{8-3\sqrt{8}}$. (4 body)
4) Aplikací reziduové věty dostaneme výsledek. (4 body)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi(1-4^{-1/3})$

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje dle srovnávacího kritéria. (1 bod)
2) Substitucí $x = e^y$ převedeme na $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2y/3}}{(e^y+1)(e^y+4)}\,\mathrm{d}y$. (2 body)
3) Nechť φ_R je kladně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy $-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i$. Spočteme integrál funkce z bodu 2) podél φ_R podle reziduové věty (2 body):
(i) Funkce je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus(\mathrm{Log}(-1)\cup\mathrm{Log}(-4))$. Ve vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. Pro $R > \ln 4$ jsou z nich „uvnitř křivky“ právě body $z_1 = \pi i$ a $z_2 = \ln 4 + \pi i$. (Tj. v těchto dvou je index 1, v ostatních je index 0.) (3 body)
(ii) Reziduum v bodě z_1 je $-\frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}\pi i}$, reziduum v bodě z_2 je $\frac{1}{12}\cdot 4^{2/3}e^{\frac{2}{3}\pi i}$. (4 body)
(iii) Zmíněný křivkový integrál je tedy roven $\frac{2}{3}\pi i(4^{-1/3}-1)e^{\frac{2}{3}\pi i}$. (3 body)
4) Provedeme limitní přechod pro $R\to\infty$. Integrály přes obě svislé úsečky mají limitu 0, integrál přes $[-R,R]$ má limitu I, integrál přes $[R+2\pi i, -R+2\pi i]$ má limitu $e^{\frac{4}{3}\pi i}I$. (2 body)
5) Dostáváme tedy $(1-e^{\frac{4}{3}\pi i})I = -\frac{2}{3}\pi i(4^{-1/3}-1)e^{\frac{2}{3}\pi i}$, odkud spočteme výsledek. (3 body)