Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (D)
ZS 2009-2010

Příklad 1: Spočtěte přírůstek logaritmu funkce $(z-1)(z+2)$ podél kladně orientovaného obvodu čtverce s vrcholy $r(1+i)$, $r(-1+i)$, $r(-1-i)$ a $r(1-i)$ v závislosti na $r > 0$. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x + \sin x}{2 - \sin x} \, \mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 3: Najděte součet řady:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{(n^2+2)(3n-1)} \qquad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (D)
ZS 2009-2010
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek: 0 pro $r < 1$, $2\pi i$ pro $1 < r < 2$, $4\pi i$ pro $r > 2$. Pro $r = 1$ a $r = 2$ nemá smysl.
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Označme $f(z) = (z-1)(z+2)$ a nechť φ_r značí onu kružnici.
2)Pro $r = 1$ a $r = 2$ nemá úloha smysl, neboť funkce nabývá nuly na $\langle \varphi_r \rangle$. (2 body)
3) Pro ostatní r je přírůstek roven $\int_{\varphi_r} \frac{f'}{f}$, což lze snadno spočítat s využitím principu argumentu (nebo přímo reziduové věty jako $\int_{\varphi_r} \frac{2z+1}{(z-1)(z+2)} \, \mathrm{d}z$):
(i) f má dva kořeny, a to 1 a -2. Oba mají násobnost 1. (2 body)
(ii) Pro $r < 1$ je index v obou kořenech 0, a tedy přírůstek je 0. (2 body)
(iii) Pro $r \in (1, 2)$ je index bodu 1 roven 1 a index bodu -2 je 0, přírůstek je tedy $2\pi i$. (2 body)
(iv) Pro $r > 2$ je v obou kořenech index 1, přírůstek je tedy $4\pi i$. (2 body)

Poznámka: Při výpočtu podle reziduové věty vyjdou rezidua $\frac{f'}{f}$ v obou pólech 1 (2 body – to nahrazuje bod 3(i)), dále je postup stejný.

Příklad 2: Výsledek: $\pi(\frac{4}{\sqrt{3}} - 2)$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Nechť φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 1. Pak integrál ze zadání je roven $\int_\varphi -\frac{(1+i)z^2-1+i}{z(iz^2+4z-i)}\,\mathrm{d}z$. Ten spočítáme podle reziduové věty. (5 bodů)

2) Integrovaná funkce je funkce racionální, s póly v bodech 0, $i(2-\sqrt{3})$, $i(2+\sqrt{3})$; všechny násobnosti 1. Přičemž bod $i(2+\sqrt{3})$ je mimo jednotkový kruh (index je v něm 0) a body 0, a $i(2-\sqrt{3})$ jsou uvnitř jednotkového kruhu (index je v nich 1). (5 bodů)

3) Spočteme rezidua:

(i) Reziduum v bodě 0 je $1+i$. (2 body)

(ii) Reziduum v bodě $i(2-\sqrt{3})$ je $-1-i\frac{2}{3}\cdot\frac{-3+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$. (4 body)

4) Aplikací reziduové věty dostaneme výsledek. (4 body)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{\pi}{19}\left(\frac{17\sqrt{2}}{\exp(\pi\sqrt{2})-\exp(-\pi\sqrt{2})} - 4\sqrt{3}\right)$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Všechny členy řady jsou definované, řada konverguje absolutně dle srovnávacího kritéria. (1 bod)

2) Označme $f(z) = \frac{3z+1}{(z^2+2)(3z-1)}$, $g(z) = f(z)\cdot\frac{\pi}{\sin\pi z}$ a $\varphi_n(t) = (n+\frac{1}{2})e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_n} g$ a provedeme limitní přechod pro $n\to\infty$. (2 body)

3) Funkce g je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{Z}\cup\{\frac{1}{3}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\})$. Ve všech vyloučených bodech má g nejvýše pól násobnosti 1. (2 body)

4) Spočteme rezidua:

(i) Reziduum g v bodě $k\in\mathbb{Z}$ je $(-1)^k\frac{3k+1}{(k^2+2)(3k-1)}$. (2 body)

(ii) Reziduum g v bodě $\frac{1}{3}$ je $\frac{4\sqrt{3}}{19}\pi$. (2 body)

(iii) Reziduum g v bodě $i\sqrt{2}$ je $\frac{17-6\sqrt{2}i}{19\sqrt{2}(\exp(-\pi\sqrt{2})-\exp(\pi\sqrt{2}))}\pi$. (3 body)

(iv) Reziduum g v bodě $-i\sqrt{2}$ je $\frac{17+6\sqrt{2}i}{19\sqrt{2}(\exp(-\pi\sqrt{2})-\exp(\pi\sqrt{2}))}\pi$. (3 body)

5) Podle reziduové věty tedy $\int_{\varphi_n} g = 2\pi i(\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k\frac{2k+1}{(k^2+2)(3k-1)} + \mathrm{res}_{\frac{1}{3}}\, g + \mathrm{res}_{i\sqrt{2}}\, g + \mathrm{res}_{-i\sqrt{2}}\, g)$. (1 bod)

6) Protože $\lim_{n\to\infty}\int_{\varphi_n} g = 0$, dostáváme kombinací předchozích faktů výsledek. (4 body)