Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (C)
ZS 2009-2010

Příklad 1: Uvažte křivku

$$\varphi = \psi_1 \dotplus \left[\frac{25}{6}\pi + \frac{i}{2}, -1 + \frac{i}{2}\right] \dotplus \left[-1 + \frac{i}{2}, -1\right] \dotplus [-1, 6\pi] \dotplus \psi_2,$$

kde

$$\psi_1(t) = t + i \sin t, \qquad t \in [0, \frac{25}{6}\pi],$$
$$\psi_2(t) = 3\pi + 3\pi e^{-it}, t \in [0, \pi].$$

Načrtněte $\langle\varphi\rangle$ a určete hodnotu indexu vzhledem k φ v jednotlivých komponentách $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

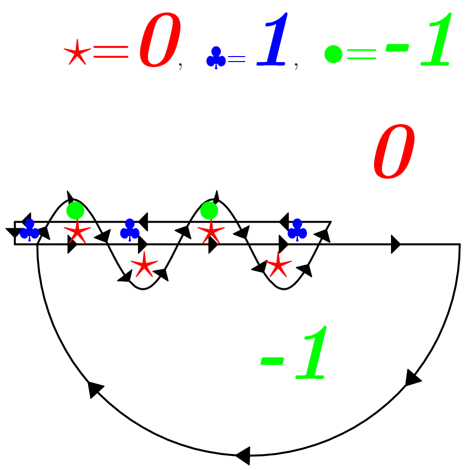
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\, \mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3 + x^2 + x + 1}\, \mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (C)
ZS 2009-2010
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek:



Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Načrtneme $\langle\psi_1\rangle$, což je graf funkce sinus na intervalu $[0, \frac{25}{6}\pi]$, začíná v bodě 0 a končí v bodě $\frac{25}{6}\pi + \frac{i}{2}$. (2 body)
2) Navážeme třemi úsečkami. (1 bod)
3) Doplníme $\langle\psi_2\rangle$, což je dolní polokružnice o středu 3π a poloměru 3π (vede z bodu 6π do bodu 0) (2 body)
3) V obrázku vyznačíme orientaci křivky a určíme index – v neomezené komponentě je roven 0 (1 bod), v ostatních komponentách ho určíme dle „propichovací věty“ (4 body).

Příklad 2: Výsledek: $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-1})$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Integrál konverguje (dokonce absolutně): Integrovaná funkce je spojitá na $(0, +\infty)$, v bodě 0 má vlastní limitu, v okolí $+\infty$ lze použít srovnávací kritérium. (1 bod)

2) Integrovaná funkce je sudá, integrál je roven polovině integrálu přes $\mathbb{R}$. (1 bod)

3) Položme $g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$. Pak g je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\}$. Všechny póly jsou násobnosti 1. (3 body)

4) Uvažme křivku $\varphi_{r,R} = \psi_R \dotplus [-R, -r] \dotplus (\dot{-}\, \psi_r) \dotplus [-r, R]$, kde $R > 1 > r > 0$ a $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. (2 body)

5) Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_{R,r}} g$: Z pólů určených v bodě 3) je „uvnitř“jen bod i (v něm je index 1, v ostatních je index 0), reziduum v bodě i je $-\frac{1}{2e}$. Integrál je tedy roven $-\frac{\pi}{e} i$. (3 body)

6) Provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$ a $r \to 0+$:

(i) $\int_{\psi_R} g \to 0$ pro $R \to \infty$ podle Jordanova lemmatu. (2 body)

(ii) $\lim_{r \to 0+} \int_{\psi_r} g = \pi i \operatorname{res}_0 g$ podle jistého lemmatu (g má v 0 pól násobnosti 1). Reziduum je rovno 1, limita je tedy πi. (3 body)

(iii) Imaginární část integrálu přes dvě úsečky z definice $\varphi_{r,R}$ má limitu (pro $R \to \infty$ a $r \to 0+$) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^3 + 9x}\, \mathrm{d}x$. (2 body)

7) Kombinací předchozího – výsledků z bodu 5) a 6) a bodu 2) dostaneme výsledek. (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $-\frac{\pi^2}{16}$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Integrál konverguje podle srovnávacího kritéria. (1 bod)

2) Pro $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ nechť je $L(z)$ ten prvek $\operatorname{Log}(z)$, který splňuje $\operatorname{Im} L(z) \in [0, 2\pi)$. Označme $f(z) = \frac{(L(z))^2}{z^3 + z^2 + z + 1}$. Funkce f je holomorfní na $\mathbf{C} \setminus ([0, +\infty) \cup \{-1, i, -i\})$. V bodech $-1, i, -i$ má f póly násobnosti 1. (2 body)

3) Pro $0 < r < R$ a $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ uvažme křivku $\varphi_{R,r,\alpha} = (\dot{-}\, \psi_{r,\alpha}) \dotplus [re^{i\alpha}, Re^{i\alpha}] \dotplus \psi_{R,\alpha} \dotplus [Re^{-i\alpha}, re^{-i\alpha}]$, kde $\phi_{r,\alpha} = re^{it}$, $t \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$. (2 body)

4) Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_{R,r,\alpha}} f$ pro $0 < r < 1 < R$:

(i) Reziduum v bodě -1 je $-\frac{\pi^2}{2}$. (1 bod)

(ii) Reziduum v bodě i je $\frac{\pi^2}{16}(1 + i)$. (2 body)

(iii) Reziduum v bodě $-i$ je $\frac{9\pi^2}{16}(1 - i)$. (2 body)

(iv) $\mathbf{C} \setminus [0, +\infty)$ je hvězdovitá množina. Ve všech třech pólech je index roven 1. Proto je integrál roven $\pi^3(1 + \frac{i}{4})$. (2 body)

5) Provedeme limitní přechod nejprve pro $\alpha \to 0+$ a potom pro $r \to 0+$ a $R \to +\infty$.

(i) Integrály podél $\psi_{r,\alpha}$ a $\psi_{R,\alpha}$ mají limitu 0. (2 body)

(ii) Integrál přes $[re^{i\alpha}, Re^{i\alpha}]$ má limitu $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3 + x^2 + x + 1}\, \mathrm{d}x$. (2 body)

(iii) Integrál přes $[re^{-i\alpha}, Re^{-i\alpha}]$ má limitu $\int_0^{\infty} \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{x^3 + x^2 + x + 1}\, \mathrm{d}x$. (2 body)

6) Zkombinujeme výsledky bodů 4) a 5):

(i) Dostaneme $-4\pi i \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^3 + x^2 + x + 1}\, \mathrm{d}x + 4\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1}\, \mathrm{d}x = \pi^3(1 + \frac{i}{4})$ (1 bod)

(ii) Porovnáním imaginárních částí v předchozí rovnosti dostaneme výsledek. (1 bod)