Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (A)
ZS 2009-2010

Příklad 1: Pro funkci
$$f(z) = \frac{\exp(\frac{\pi i}{z}) - 1}{\cos(\pi z)}$$
najděte všechny kořeny a izolované singularity. Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ. (10 bodů)

Příklad 2: Najděte součet řady:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+4} \qquad \text{(20 bodů)}$$

Příklad 3: Spočtěte integrál:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(2x+\pi)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(20 bodů)}$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (A)
ZS 2009-2010
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: f je holomorfní na $\mathbf{C} \setminus (\{0\} \cup \{k + \frac{1}{2} : k \in \mathbf{Z}\})$. V bodě 0 je podstatná singularita, v bodech $\pm\frac{1}{2}$ je odstranitelná singularita s nenulovou limitou, v bodech $k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{-1, 0\}$ jsou póly násobnosti 1. Kořeny jsou v bodech $\frac{1}{2k}$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, všechny násobnosti 1.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Čitatel je holomorfní na $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. V 0 má podstatnou singularitu. (2 body)
2) Kořeny čitatele jsou $\frac{1}{2k}$, $k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$, všechny mají násobnost 1 (například proto, že derivace je nenulová). (3 body)
3) Jmenovatel je celá funkce, kořeny má v bodech $k+\frac{1}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, všechny násobnosti 1 (například proto, že derivace je nenulová). (2 body)
4) Kombinací předchozího dostaneme výsledek. (3 body)

Příklad 2: Výsledek: $\frac{1}{8}(3\pi\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} - 1)$.
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Všechny členy řady jsou definované, řada konverguje dle srovnávacího kritéria. (1 bod)
2) Platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+4} = \frac{1}{2}(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+4} - \frac{1}{4})$. (1 bod)
3) Označme $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+4}$, $g(z) = f(z) \cdot \pi \operatorname{cotg} \pi z$ a $\varphi_n(t) = (n+\frac{1}{2})e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_n} g$ a provedeme limitní přechod pro $n \to \infty$. (2 body)
4) Funkce g je holomorfní na $\mathbf{C} \setminus (\mathbf{Z} \cup \{1+i, 1-i, -1+i, -1-i\})$. Ve všech vyloučených bodech má g nejvýše pól násobnosti 1. (2 body)
5) Spočteme rezidua:
(i) Reziduum g v bodě $k \in \mathbf{Z}$ je $\frac{k^2+1}{k^4+4}$. (1 bod)

(ii) Rezidua g v bodech $1+i$ a $-1-i$ jsou $\frac{\pi(1+2i)}{8(-1+i)}\operatorname{cotg}(\pi i)$. (3 body)
(iii) Rezidua g v bodech $1-i$ a $-1+i$ jsou $\frac{\pi(-1+2i)}{8(-1-i)}\operatorname{cotg}(\pi i)$. (3 body)
6) Podle reziduové věty tedy $\int_{\varphi_n} g = 2\pi i(\sum_{k=-n}^{n}\frac{k^2+1}{k^4+4} + \operatorname{res}_{1+i} g + \operatorname{res}_{1-i} g + \operatorname{res}_{-1+i} g + \operatorname{res}_{-1-i} g) = 2\pi i(\sum_{k=-n}^{n}\frac{k^2+1}{k^4+4} - \frac{3}{4}\pi\frac{e^\pi+e^{-\pi}}{e^\pi-e^{-\pi}})$. (3 body)
7) Protože $\lim_{n\to\infty}\int_{\varphi_n} g = 0$, dostáváme $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k^2+1}{k^4+4} = \frac{3}{4}\pi\frac{e^\pi+e^{-\pi}}{e^\pi-e^{-\pi}}$ (3 body)
8) Z bodu 2 nyní dopočteme výsledek. (1 bod)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{\pi(2+\pi e^{-1})}{\pi^2+4}$.
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje (dokonce absolutně): Integrovaná funkce je spojitá na $(-\infty,-\frac{\pi}{2})\cup(-\frac{\pi}{2},+\infty)$, v bodě $-\frac{\pi}{2}$ má vlastní limitu, v okolí $\pm\infty$ lze použít srovnávací kritérium. (1 bod)
2) Položme $g(z) = \frac{e^{iz}}{(2z+\pi)(z^2+1)}$. Pak g je holomorfní na $\mathbf{C}\setminus\{-\frac{\pi}{2}, i, -i\}$. Ve vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. (2 body)
3) Uvažme křivku $\varphi_{r,R} = \psi_R \dotplus [-R,-\frac{\pi}{2}-r] \dotplus (\dot{-}\,\theta_r) \dotplus [-\frac{\pi}{2}+r, R]$, kde $R>\pi$, $\frac{\pi}{2} > r > 0$, $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$ a $\theta_r(t) = -\frac{\pi}{2}+re^{it}$, $r\in[0,\pi]$. (2 body)
4) Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_{R,r}} g$: Z pólů určených v bodě 2) je „uvnitř“ jen bod i (v něm je index 1, v ostatních je index 0), reziduum v bodě i je $-\frac{e^{-1}(2+\pi i)}{2(4+\pi^2)}$. Integrál je tedy roven $-\frac{\pi e^{-1}(-\pi+2i)}{4+\pi^2}$. (4 body)
5) Provedeme limitní přechod pro $R\to\infty$ a $r\to 0+$:
(i) $\int_{\psi_R} g \to 0$ pro $R\to\infty$ podle Jordanova lemmatu. (2 body)
(ii) $\lim_{r\to 0+}\int_{\psi_r} g = \pi i \operatorname{res}_{-\frac{\pi}{2}} g$ podle jistého lemmatu (g má v $-\frac{\pi}{2}$ pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $-\frac{2i}{\pi^2+4}$, limita je tedy $\frac{2\pi}{\pi^2+4}$. (4 body)
(iii) Reálná část integrálu přes dvě úsečky z definice $\varphi_{r,R}$ má limitu (pro $R\to\infty$ a $r\to 0+$) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(2x+\pi)(x^2+1)}\,dx$. (2 body)
6) Kombinací předchozího – výsledků z bodů 4) a 5) dostaneme výsledek. (3 body)