Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (D)

LS 2008-2009

Příklad 1 : Spočtěte inverzní matici k matici $\mathbb{A}$ a k matici $\mathbb{B}$, která vznikne z $\mathbb{A}^T$ vydělením každého prvku číslem 45.:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arccos \frac{x+1}{y^2+1},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[-1, 1, f(-1, 1)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

určuje v jistém okolí bodu $[-1, 1]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(-1)$ a $f''(-1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě -1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2, \quad M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z^2 \geq 4, x + z^2 = 3\right\} \qquad (18 \text{ bodů})$$

Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1 - \cos \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-n}}{\sqrt[4]{n^2+n} - \sqrt[4]{n^2-n}}\right) \qquad (12 \text{ bodů})$$

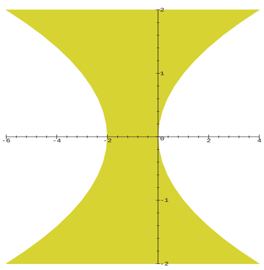
Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (D)

LS 2008-2009

Příklad 1: $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{45} & \frac{8}{45} & -\frac{2}{45} & -\frac{4}{45} \\ -\frac{2}{45} & -\frac{4}{45} & \frac{1}{45} & \frac{8}{45} \\ -\frac{4}{45} & -\frac{2}{45} & \frac{8}{45} & \frac{1}{45} \\ \frac{8}{45} & \frac{1}{45} & -\frac{4}{45} & -\frac{2}{45} \end{pmatrix}$, $\mathbb{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 8 \\ 8 & -4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 & -4 \\ -4 & 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Příklad 2: $D_f = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 : -y^2 - 2 \leq x \leq y^2\}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{(y^2+1)\sqrt{1-(\frac{x+1}{y^2+1})^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y(x^2+1)}{(y^2+1)\sqrt{1-(\frac{x+1}{y^2+1})^2}}$, obě parciální derivace pro $-y^2 - 2 < x < y^2$. Z parciálních derivací v bodech splňujících $x = y^2$ nebo $x = -y^2 - 2$ má smysl počítat jen $\frac{\partial f}{\partial y}(-2, 0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, ty však neexistují. Zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, protože funkce není definovaná na žádné úsečce příslušného směru. Tečná rovina: $z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(x + 1)$.

Definiční obor:



Příklad 3: $f'(-1) = -1$, $f''(-1) = 0$, rovnice tečny je $y = 1 - (x + 1)$.

Příklad 4: Maximum ani supremum neexistuje, f není na M shora omezená ($[3, n, 0] \in M$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $f(3, n, 0) \to +\infty$). Minimum $\frac{19}{4}$ v bodech $[\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}]$ (všechny čtyři možnosti znamének). Že to je skutečně minimum plyne z toho, že například $\{[x, y, z] \in M : f(x, y, z) \leq 10\}$ je kompaktní.)

Příklad 5: Diverguje. Není splněna nutná podmínka konvergence.