Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (A)
LS 2008-2009

Příklad 1 : Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené tři vektory pravých stran $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ a $\mathbf{b}_3$:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 & 21 \\ 1 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 13 & 3 & 21 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{e^{x^2+y^2} - e^4},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[3, 0, f(3,0)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg}\frac{x+2y}{3} + \operatorname{arctg}\frac{2x+y}{3} = \frac{\pi}{2}$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = xy^2 \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, x - z \geq 0\} \qquad \text{(18 bodů)}$$

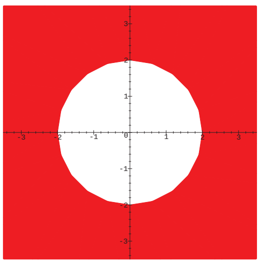
Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\sqrt{n^2+2n+15} - n\right) \qquad \text{(12 bodů)}$$

- -

Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (A)
LS 2008-2009

Příklad 1: Pro $\mathbf{b}_1$: $[6, -28, -16, 19]$; pro $\mathbf{b}_2$: $[-14, -160, -75, 111]$; pro $\mathbf{b}_3$: $[3, 10, 4, -7]$.
Příklad 2: $D_f = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \geq 4\}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xe^{x^2+y^2}}{\sqrt{e^{x^2+y^2}-e^4}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{ye^{x^2+y^2}}{\sqrt{e^{x^2+y^2}-e^4}}$, obě parciální derivace pro body $[x,y]$ splňující $x^2+y^2 > 4$. Z parciálních derivací v bodech splňujících $x^2+y^2 = 4$ má smysl počítat jen $\frac{\partial f}{\partial y}(\pm 2, 0)$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \pm 2)$, ty však neexistují. Zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, protože funkce není definovaná na žádné úsečce příslušného směru. Tečná rovina: $z = \sqrt{e^9 - e^4} + \frac{3e^9}{\sqrt{e^9-e^4}}(x-3)$.
Definiční obor:



Příklad 3: $f'(1) = -1$, $f''(1) = \frac{2}{9}$, rovnice tečny je $y = 1 - (x-1)$.
Příklad 4: Maximum $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ v bodech $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0]$, minimum $-\frac{2}{3\sqrt{6}}$ v bodech $[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}]$.
Příklad 5: Diverguje. Členy jsou kladné (alespoň od nějakého n_0 dále), lze použít limitní srovnávací kritérium a srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.