Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (E)
ZS 2008-2009

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+\sin n}-\sqrt{n^3+3n}}{\sqrt[4]{n^2+n}-\sqrt[4]{n^2+\operatorname{arctg} n}} \qquad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x}{2}\right)^{\operatorname{tg}^2 2x} \qquad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (x^2-1)\sqrt{1+\cos\pi x}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \left(3^{x+2|x|}-9\right)^2. \qquad (20 \text{ bodů})$$

– –

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (E)
ZS 2008-2009

Příklad 1: -6
Příklad 2: $\sqrt{e}$
Příklad 3: f je definovaná a spojitá na $\mathbf{R}$. $f'(x) = 2x\sqrt{1+\cos\pi x} - \frac{\pi(x^2-1)\sin\pi x}{2\sqrt{1+\cos\pi x}}$ pro $x \in \mathbf{R}\setminus\{2k+1 : k\in\mathbf{Z}\}$; $f'(1)=f'(-1)=0$; pro $k\in\mathbf{Z}\setminus\{-1,0\}$ je $f'_-(2k+1) = -2\sqrt{2}k(k+1)\pi$, $f'_+(2k+1) = 2\sqrt{2}k(k+1)\pi$.
Příklad 4: $D_f=\mathbf{R}$, f je spojitá na $\mathbf{R}$, limita v $-\infty$ i v $+\infty$ je $+\infty$. f je klesající na $(-\infty,-2\rangle$, rostoucí na $\langle -2,0\rangle$, klesající na $\langle 0,\frac{2}{3}\rangle$, rostoucí na $\langle\frac{2}{3},+\infty)$; $f'_-(0)=16\log 3$, $f'_+(0)=-48\log 3$; v bodech -2 a $\frac{2}{3}$ má f globální minimum rovné 0, v bodě 0 má lokální maximum; $H_f=\langle 0,+\infty)$. f je konvexní na $(-\infty,-\frac{\log(9/2)}{\log 3}\rangle$, konkávní na $\langle -\frac{\log(9/2)}{\log 3},0\rangle$, konkávní na $\langle 0,\frac{\log(9/2)}{3\log 3}\rangle$, konvexní na $\langle\frac{\log(9/2)}{3\log 3},+\infty$. V bodech $-\frac{\log(9/2)}{\log 3}$ a $\frac{\log(9/2)}{3\log 3}$ jsou inflexní body. f nemá asymptoty.
Graf: