Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (D)
ZS 2008-2009

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{[\sqrt{n}]+[2\sqrt{n}]+\cdots+[n\sqrt{n}]} \qquad [\dots] \text{ znamená celou část} \qquad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\cos x\cdot\log(\cos x)}-\sqrt{1+\log\cos x}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-\sqrt[3]{\sin x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{\sin^2 x} \qquad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (x+|x|+1)^{|x-1|}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^2-6}. \qquad (20 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (D)
ZS 2008-2009

Příklad 1: 2
Příklad 2: $\frac{3}{4}$
Příklad 3: f je definovaná a spojitá na $\mathbf{R}$.
$f'(x) = \begin{cases} 0 & x\in(-\infty,0), \\ (2x+1)^{|x-1|}(\operatorname{sgn}(x-1)\log(2x+1)+\frac{2|x-1|}{2x+1}) & x\in(0,1)\cup(1,+\infty); \end{cases}$ $f'_-(0)=0$, $f'_+(0)=2$, $f'_-(1)=-\log 3$, $f'_+(1)=\log 3$.
Příklad 4: $D_f=\mathbf{R}\setminus\{-\sqrt{6},\sqrt{6}\}$, f je spojitá v každém bodě D_f a je sudá, stačí tedy vyšetřovat na $\langle 0,+\infty)$, tj. na $\langle 0,\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},+\infty)$. $f(0)=0$, limita v $\sqrt{6}$ zleva je $-\frac{\pi}{2}$, zprava $\frac{\pi}{2}$, limita v $+\infty$ je $\frac{\pi}{4}$. f je klesající na $\langle 0,\sqrt{6})$ a na $(\sqrt{6},+\infty)$, v 0 je lokální maximum, $H_f=(-\frac{\pi}{2},0\rangle\cup(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$. f je konkávní na $\langle 0,\sqrt{1+\sqrt{7}}\rangle$ (ze sudosti i na $\langle -\sqrt{1+\sqrt{7}},\sqrt{1+\sqrt{7}}\rangle$), konvexní na $\langle\sqrt{1+\sqrt{7}},\sqrt{6})$ a na $(\sqrt{6},+\infty)$. V bodě $\sqrt{1+\sqrt{7}}$ (a v bodě opačném) je inflexní bod. Asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je $y=\frac{\pi}{4}$.
Graf: