Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (VZOR)
ZS 2007-2008

Příklad 1: Spočtěte přírůstek logaritmu funkce $z(z+1)$ podél kladně orientované kružnice o středu 1 a poloměru $r > 0$ v závislosti na r. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{\cos x - \sin x + 5} \, \mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^4 + 3x^2 + 2} \, \mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (VZOR)
ZS 2007-2008
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Nechť φ_r značí onu kružnici. Pro $r = 1$ a $r = 2$ nemá úloha smysl, neboť funkce nabývá nuly na $\langle \varphi_r \rangle$. Pro ostatní r je přírůstek roven $\int_{\varphi_r} \frac{2z+1}{z(z+1)} \, \mathrm{d}z$, což lze snadno spočítat s využitím reziduové věty (případně Cauchyovy věty a Cauchyova vzorce), a je to 0 pro $r < 1$, $2\pi i$ pro $r \in (1, 2)$ a $4\pi i$ pro $r > 2$.

Orientační bodové hodnocení tohoto příkladu:
vyloučení $r = 1$ a $r = 2$ … 1 bod
přepis pomocí integrálu … 1 bod
případ $r < 1$ … 2 body
případ $r \in (1, 2)$ … 3 body
případ $r > 2$ … 3 body

Příklad 2: Nechť φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 1. Pak integrál ze zadání je roven

$$\int_\varphi \frac{\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})}{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) - \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) + 5} \cdot \frac{1}{iz} \, \mathrm{d}z.$$

To plyne z definice křivkového integrálu, z tvaru parametrizace kružnice a z vyjádření $\sin x$ a $\cos x$ pomocí exponenciály. Upravíme a dostaneme

$$\int_\varphi -\frac{z^2 - 1}{z(z^2(1+i) + 10z + 1 - i)} \, \mathrm{d}z.$$

Integrand je racionální funkce s póly v bodech 0, $(-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2})(1-i)$ a $(-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2})(1-i)$. První dva mají absolutní hodnotu menší než 1, leží tedy uvnitř jednotkového kruhu; třetí má absolutní hodnotu větší než 1, leží vně jednotkového kruhu.
Všechny póly jsou jednonásobné. Reziduum v 0 je $\frac{1+i}{2}$, reziduum v $(-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2})(1-i)$ vyjde $-\frac{1}{2} - i\frac{5}{2\sqrt{23}}$.
Podle reziduové věty je integrál roven $2\pi i$ krát součet těchto dvou reziduí, tedy $\pi(\frac{5}{\sqrt{23}} - 1)$.

Orientační bodové hodnocení tohoto příkladu:
převod na křivkový integrál … 3 body
úprava racionální funkce a nalezení pólů … 5 bodů
výběr pólů uvnitř kruhu … 2 body
reziduum v nule … 2 body
reziduum v druhém bodě … 4 body
aplikace reziduové věty a výsledek … 4 body

Příklad 3: Substitucí $x = e^y$ převedeme na

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{4}{3}x}}{e^{4x} + 3e^{2x} + 2}\, dx.$$

Označme tento integrál I a integrovanou funkci f. f má póly v bodech $i(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ a $\frac{1}{2}\ln 2 + i(\frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $R > 0$ uvažme $\varphi_R = [-R, R] \dotplus [R, R + 2\pi i] \dotplus [R + 2\pi i, -R + 2\pi i] \dotplus [-R + 2\pi i, -R]$. Je-li R dost velké ($R > \frac{1}{2}\ln 2$), je $\int_{\varphi_R} f$ podle reziduové věty roven $2\pi i$ krát součet reziduí v bodech $\frac{\pi}{2}i$, $\frac{3}{2}\pi i$, $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2}i$ a $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3}{2}\pi i$.
Všechny póly jsou jednonásobné, spočteme rezidua: v bodě $\frac{\pi}{2}i$ je $\frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})$, bodě $\frac{3}{2}\pi i$ je $-\frac{1}{2}$, v bodě $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2}i$ je $-\frac{\sqrt[3]{4}}{8}(1 - i\sqrt{3})$, bodě $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3}{2}\pi i$ je $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$. Součet reziduí je tedy $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt[3]{4}}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt[3]{4} - 2)$, tedy pro $R > \frac{1}{2}\ln 2$ je

$$\int_{\varphi_R} = \pi(\frac{\sqrt{3}}{4}(2 - \sqrt[3]{4}) + i(\frac{\sqrt[3]{4}}{4} - \frac{1}{2})).$$

Dále,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} f = I;$$
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{[R,R+2\pi i]} f = 0;$$
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{[R+2\pi i,-R+2\pi i]} f = -e^{\frac{8}{3}\pi i} I = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})I;$$
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{[-R+2\pi i,-R]} f = 0.$$

Tedy

$$I = \frac{1}{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\varphi_R} f = \pi\frac{\sqrt{3}}{6}(2 - \sqrt[3]{4}).$$

Orientační bodové hodnocení tohoto příkladu:
substituce … 2 body
volba vhodné křivky … 2 body
nalezení pólů a výběr těch uvnitř … 3 body
výpočet reziduí … 5 bodů
výpočet křivkového integrálu pomocí reziduové věty … 3 body
limity pro $R \to \infty$ … 2 body
závěr a výsledek … 3 body