Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (E)
ZS 2007-2008

Příklad 1: Najděte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{\sin z}{z-1}$$

v maximálních možných mezikružích o středu 0. (10 bodů)

Příklad 2: Najděte součet řady:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+n+7}{16n^4-1}$$ (20 bodů)

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+1}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x$$ (20 bodů)

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (E)
ZS 2007-2008
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Na $U(0,1)$ je $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{[\frac{k-1}{2}]} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \right) z^k$; na $P(0,1,\infty)$ je $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=\max\{0,\lceil \frac{k}{2} \rceil\}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right) z^k$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, tedy na $U(0,1)$ lze vyjádřit mocninnou řadou, na $P(0,1,\infty)$ Laurentovou řadou. (1 bod)
2) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ na $\mathbb{C}$. (1 bod)
3) $\frac{1}{z-1} = \begin{cases} -\sum_{m=0}^{\infty} z^m, & z \in U(0,1) \text{ (1 bod)}, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{z^m}, & z \in P(0,1,\infty) \text{ (2 body)}. \end{cases}$
4. Výsledek dostaneme vynásobením příslušných řad. (5 bodů, z toho 2 body na $U(0,1)$ a 3 body na $P(0,1,\infty)$).

Příklad 2: Výsledek: $-\pi(\frac{29}{16} + \frac{27}{8(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2})})$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Všechny členy řady jsou definované, řada konverguje absolutně dle srovnávacího kritéria. (1 bod)
2) Označme $f(z) = \frac{z^2+z+7}{16z^4-1}$, $g(z) = f(z) \cdot \frac{\pi}{\sin \pi z}$ a $\varphi_n(t) = (n+\frac{1}{2})e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_n} g$ a provedeme limitní přechod pro $n \to \infty$. (2 body)
3) Funkce g je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\})$. Ve všech vyloučených bodech má g nejvýše pól násobnosti 1. (2 body)
4) Spočteme rezidua:
(i) Reziduum g v bodě $k \in \mathbb{Z}$ je $(-1)^k \frac{k^2+k+7}{16k^4-1}$. (2 body)
(ii) Reziduum g v bodě $\frac{1}{2}$ je $\frac{31}{32}\pi$. (2 body)
(iii) Reziduum g v bodě $-\frac{1}{2}$ je $\frac{27}{32}\pi$. (2 body)
(iv) Reziduum g v bodě $\frac{i}{2}$ je $\frac{(27+2i)\pi}{16(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2})}$. (2 body)
(v) Reziduum g v bodě $-\frac{i}{2}$ je $\frac{(27-2i)\pi}{16(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2})}$. (2 body)
5) Podle reziduové věty tedy $\int_{\varphi_n} g = 2\pi i(\sum_{k=-n}^{n} \frac{k^2+k+7}{16k^4-1} + \operatorname{res}_{\frac{1}{2}} g + \operatorname{res}_{-\frac{1}{2}} g + \operatorname{res}_{\frac{i}{2}} g + \operatorname{res}_{-\frac{i}{2}} g$. (1 bod)
6) Protože $\lim_{n\to\infty} \int_{\varphi_n} g = 0$, dostáváme kombinací předchozích faktů výsledek. (4 body)

Příklad 3: Výsledek: 2π

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje (funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, použije se srovnávací kritérium). (1 bod)
2) Označme integrovanou funkci f a pro $R > 0$ nechť $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, a $\varphi_R = [-R, R] \dotplus \psi_R$. Spočteme integrál z f podél φ_R dle reziduové věty a provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$. (3 body)
3) f je racionální funkce s póly v bodech $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$. Všechny póly jsou násobnosti 1. Přitom body $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ a $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ leží „vně křivky“, je v nich index nula. (4 body)
4) Reziduum v bodě $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ je $-i\frac{3-\sqrt{3}}{6}$, reziduum v bodě $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ je $-i\frac{3+\sqrt{3}}{6}$. (5 bodů)
5) Pro $R > 1$ je dle reziduové věty $\int_{\varphi_R} = 2\pi$. (4 body)
6) $\lim_{R\to\infty} \int_{\psi_R} f = 0$, limita integrálu přes $[-R, R]$ je rovna integrálu ze zadání. Tím dostáváme výsledek. (3 body)