Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (D)
ZS 2007-2008

Příklad 1: Pro funkci

$$f(z) = \frac{\sin z}{1 - e^{1/z}}$$

najděte všechny kořeny a izolované singularity. Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3 + 9x} \, \mathrm{d}x$$ (20 bodů)

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + x + 7} \, \mathrm{d}x$$ (20 bodů)

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (D)
ZS 2007-2008
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek: f je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{\frac{1}{2k\pi i} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\})$, v bodě 0 není izolovaná singularita, v ostatních vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. Kořeny jsou v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Jmenovatel je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (1 bod), v bodě 0 má podstatnou singularitu (1 bod), kořeny má v bodech $\frac{1}{2k\pi i}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, všechny násobnosti 1 (3 body).
2) Čitatel je celá funkce s kořeny v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, všechny násobnosti 1. (2 body)
3) Kombinací uvedených faktů dostaneme výsledek. (3 body)

Příklad 2: Výsledek: $\frac{\pi}{18}(1 - e^{-3})$.
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje (dokonce absolutně): Integrovaná funkce je spojitá na $(0, +\infty)$, v bodě 0 má vlastní limitu, v okolí $+\infty$ lze použít srovnávací kritérium. (1 bod)
2) Integrovaná funkce je sudá, integrál je roven polovině integrálu přes $\mathbb{R}$. (1 bod)
3) Položme $g(z) = \frac{e^{iz}}{z^3+9z}$. Pak g je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0, 3i, -3i\}$. Všechny póly jsou násobnosti 1. (3 body)
4) Uvažme křivku $\varphi_{r,R} = \psi_R \dotplus [-R, -r] \dotplus (\dot{-}\, \psi_r) \dotplus [-r, R]$, kde $R > 3 > r > 0$ a $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. (2 body)
5) Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_{R,r}} g$: Z pólů určených v bodě 3) je „uvnitř"jen bod $3i$ (v něm je index 1, v ostatních je index 0), reziduum v bodě $3i$ je $-\frac{e^{-3}}{18}$. Integrál je tedy roven $-\frac{\pi e^{-3}}{9} i$. (3 body)
6) Provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$ a $r \to 0+$:
(i) $\int_{\psi_R} g \to 0$ pro $R \to \infty$ podle Jordanova lemmatu. (2 body)
(ii) $\lim_{r\to 0+} \int_{\psi_r} g = \pi i \operatorname{res}_0 g$ podle jistého lemmatu (g má v 0 pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $\frac{1}{9}$, limita je tedy $\frac{1}{9}\pi i$. (3 body)
(iii) Imaginární část integrálu přes dvě úsečky z definice $\varphi_{r,R}$ má limitu (pro $R \to \infty$ a $r \to 0+$) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^3+9x} \, dx$. (2 body)
7) Kombinací předchozího – výsledků z bodu 5) a 6) a bodu 2) dostaneme výsledek. (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{\pi}{\sqrt{1+2\sqrt{7}}}$.
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje dle srovnávacího kritéria. (1 bod)
2) Substitucí $x = e^y$ převedeme na $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{y/2} \cdot e^y}{e^{2y}+e^y+7} \, dy$. (2 body)
3) Nechť φ_R je kladně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy $-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i$. Spočteme integrál funkce z bodu 2) podél φ_R podle reziduové věty (2 body):
(i) Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\operatorname{Log}(-\frac{1}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}) \cup \operatorname{Log}(-\frac{1}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}))$. Ve vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. Pro $R > \frac{1}{2}\ln 7$ jsou z nich „uvnitř křivky" právě body $z_1 = \log(-\frac{1}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2})$ a $z_2 = \log(-\frac{1}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}) + 2\pi i$. (Tj. v těchto dvou je index 1, v ostatních je index 0.) (3 body)
(ii) Reziduum v bodě z_1 je $\frac{e^{z_1/2}}{3i\sqrt{3}}$, reziduum v bodě z_2 je $-\frac{e^{z_2/2}}{3i\sqrt{3}}$. (4 body)
(iii) Zmíněný křivkový integrál je tedy roven $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(e^{z_1/2} - e^{z_2/2}) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\sqrt{2\sqrt{7} - 1}$. (3 body)
4) Provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$. Integrály přes obě svislé úsečky mají limitu 0, integrál přes $[-R, R]$ má limitu I, integrál přes $[R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$ má limitu $-I$. (2 body)
5) Dostáváme tedy $2I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\sqrt{2\sqrt{7} - 1}$, odkud spočteme výsledek. (3 body)