Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (B)
ZS 2007-2008

Příklad 1: Pro funkci
$$f(z) = \frac{\sin z^2}{1 - \cos z}$$
najděte všechny kořeny a izolované singularity. Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2}\,\mathrm{d}x$$
(20 bodů)

Příklad 3: Najděte součet řady:
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n + 5}{8n^3 + 1}$$
(20 bodů)

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (B)
ZS 2007-2008
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek: Funkce f je holomorfní v $\mathbb{C}\setminus\{2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$, v 0 je odstranitelná singularita (po dodefinování hodnota různá od 0), v bodech $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ pól násobnosti 2. Kořeny násobnosti 1 v bodech $\pm\sqrt{k\pi}$, $\pm i\sqrt{k\pi}$, $k\in\mathbb{N}$.
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Čitatel i jmenovatel jsou celé funkce, jmenovatel má kořeny v bodech $2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$. Funkce f je tudíž holomorfní v $\mathbb{C}\setminus\{2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$. (2 body)
2) Násobnost každého z uvedených kořenů jmenovatele je 2. (2 body)
3) Čitatel má kořeny v bodech $\pm\sqrt{k\pi}$ a $\pm i\sqrt{k\pi}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. 0 je kořen násobnosti 2, ostatní kořeny jsou násobnosti 1. (3 body)
4) Kombinací uvedených faktů dostaneme výsledek. (3 body)
Příklad 2: Výsledek: π
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje (funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, použije se srovnávací kritérium). (1 bod)
2) Označme integrovanou funkci f a pro $R>0$ nechť $\psi_R(t)=Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, a $\varphi_R=[-R,R]\dotplus\psi_R$. Spočteme integrál z f podél φ_R dle reziduové věty a provedeme limitní přechod pro $R\to\infty$. (3 body)
3) f je racionální funkce s póly v bodech i, $-i$, $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$. Všechny póly jsou násobnosti 1. Přitom body $-i$ a $-i\sqrt{2}$ leží „vně křivky“, je v nich index nula. (4 body)
4) Reziduum v bodě i je $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$, reziduum v bodě $i\sqrt{2}$ je $-\frac{3}{2}$. (5 bodů)
5) Pro $R>\sqrt{2}$ je dle reziduové věty $\int_{\varphi_R}=\pi$. (4 body)
6) $\lim_{R\to\infty}\int_{\psi_R} f=0$, limita integrálu přes $[-R,R]$ je rovna integrálu ze zadání. Tím dostáváme výsledek. (3 body)
Příklad 3: Výsledek: $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}+22\cosh\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\sinh\frac{\pi\sqrt{3}}{4}}{\cosh^2\frac{\pi\sqrt{3}}{4}+\sinh^2\frac{\pi\sqrt{3}}{4}}$.
Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Všechny členy řady jsou definované, řada konverguje dle srovnávacího kritéria. (1 bod)
2) Označme $f(z)=\frac{z+5}{8z^3+1}$, $g(z)=f(z)\cdot\pi\operatorname{cotg}\pi z$ a $\varphi_n(t)=(n+\frac{1}{2})e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_n} g$ a provedeme limitní přechod pro $n\to\infty$. (2 body)
2) Funkce g je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{Z}\cup\{-\frac{1}{2},\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\})$. Ve všech vyloučených bodech má g nejvýše pól násobnosti 1. (2 body)
3) Spočteme rezidua:
(i) Reziduum g v bodě $k\in\mathbb{Z}$ je $\frac{k+5}{8k^3+1}$. (2 body)
(ii) Reziduum g v bodě $-\frac{1}{2}$ je 0. (1 bod)
(iii) Reziduum g v bodě $\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ je $-\frac{\pi}{8\sqrt{3}}(3\sqrt{3}+11i)\frac{1-2i\cosh\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\sinh\frac{\pi\sqrt{3}}{4}}{\cosh^2\frac{\pi\sqrt{3}}{4}+\sinh^2\frac{\pi\sqrt{3}}{4}}$. (3 body)
(iv) Reziduum g v bodě $\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$ je $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}(-3\sqrt{3}+11i)\frac{1+2i\cosh\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\sinh\frac{\pi\sqrt{3}}{4}}{\cosh^2\frac{\pi\sqrt{3}}{4}+\sinh^2\frac{\pi\sqrt{3}}{4}}$. (3 body)
[Poznámka: Z hodnot reziduí plyne, že v bodech -5 a $-\frac{1}{2}$ jsou odstranitelné singularity. Na postup to však nemá vliv.]
4) Podle reziduové věty tedy $\int_{\varphi_n} g=2\pi i(\sum_{k=-n}^{n}\frac{k+5}{8k^3+1}+\operatorname{res}_{\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}} g+\operatorname{res}_{\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}} g)$. (3 body)
5) Protože $\lim_{n\to\infty}\int_{\varphi_n} g=0$, dostáváme kombinací předchozích faktů výsledek. (3 body)